Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso dei joint

Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Realtà Virtuale.

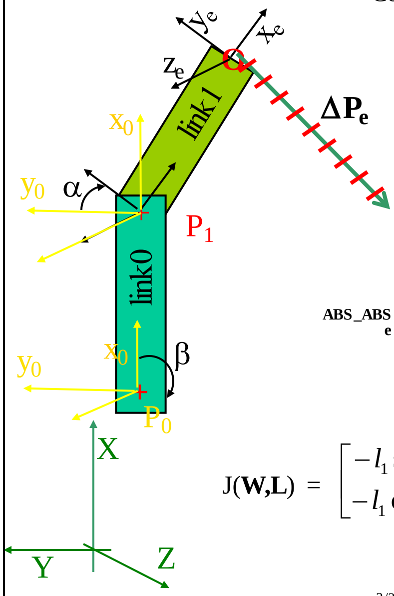
Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

Cinematica inversa

Consideriamo la trasformazione end_point -> joint.

La trasformazione joint -> end_point è:
$\mathbf{P(t)} = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.



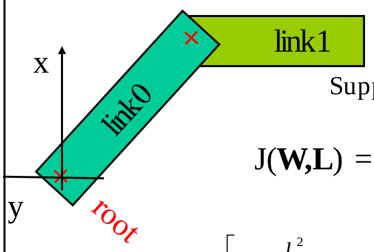
$$_{\ e}^{\mathrm{ABS\_ABS}}\mathbf{A(t)} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0 \cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0 \sin\beta(t) + T_y(t) \end{bmatrix}$$

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 2, n = 4)

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b \qquad b = \begin{bmatrix} dP_{e_x}/dt \\ dP_{e_y}/dt \end{bmatrix} \quad 2 \times 1 \qquad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \\ dT_x/dt \\ dT_y/dt \end{bmatrix} \quad 4 \times 1$$



Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

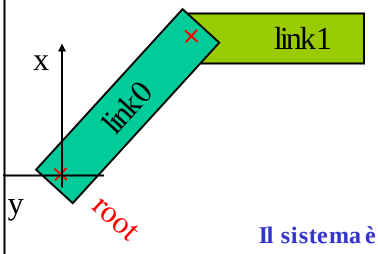
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

$\det(J^T * J) = 0$



Il sistema è indeterminato, ammette inifinite soluzioni.

Voglio poterne determinare una secondo un qualche criterio ragionevole.

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

Soluzione (m=2, n=4)

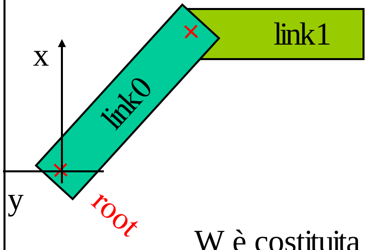
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

?

$\det(J^T * J) = 0$

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione



$$\boxed{\mathbf{x = V' W^{-1} U' J^T b}}$$

W è costituita ad esempio così:

$$\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli

Sistema lineare: soluzione robusta

A X = B $\Rightarrow$ **A' A X = A' B** $\Rightarrow$ **X = (A'A)$^{-1}$A'B**

Numero di condizionamento varia circa con (A'*A).

Soluzione tramite Singular Value Decomposition

Numero di condizionamento varia circa con A.

A X = B

U W V X = B

$$\boxed{\mathbf{x = V' W^{-1} U' b}}$$

Ortonormale M x N   Diagonale (N x N)   Ortonormale N x N

$\mathbf{V^T W^{-1} U^T U W V X = V^T W^{-1} U^T B} \rightarrow \mathbf{X = V^T W^{-1} U^T B}$

- La matrice C non viene formata.
- W^{-1} contiene i reciproci degli elementi di W.

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$

Soluzione (m=2, n=4)

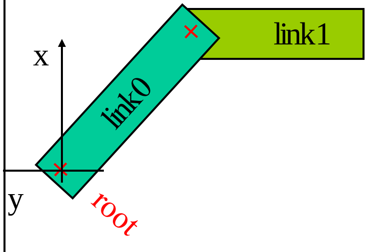
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(J^T * J) = 0$

?

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione



$\boxed{x = V' W^{-1} U' \, J^T b}$

W è costituita ad esempio così: $\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli. Come calcolo W^{-1}?

Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti

$x = (A'*A)^{-1} A'* b$ $\boxed{x = V' W^{-1} U' A' b}$

Se A è rank-deficient, A'*A è singolare.

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice W.

In questo caso il problema è sovraparametrizzato.

Soluzione (m=2, n=4)

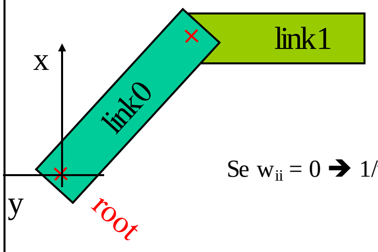
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(J^T * J) = 0$

?

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

Il sistema è indeterminato, ma posso determinare ugualmente una soluzione



$\boxed{\mathbf{x = V' W^{-1} U' J^T b}}$

Se $w_{ii} = 0 \Rightarrow 1/w_{ii} = 0$

W^{-1} è costituita ad esempio così: $\begin{bmatrix} 1/w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli.

Soluzione (m=2, n=4)

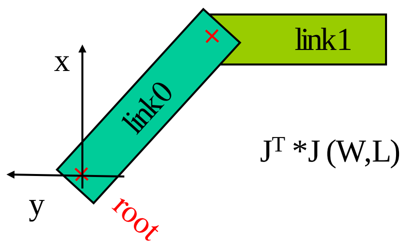
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{x = V' W^{-1} U' b}}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\det(J^T * J) = 0$



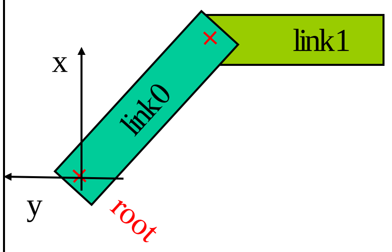
$$J^T * J\,(W,L) = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$
$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V'W^{-1}U'b}$




```
>>[U W V] = svd(JJ)
U =
  -0.4469   0.5005  -0.7398   0.0497
  -0.8633  -0.2591   0.3622   0.2375
   0.2234  -0.2502  -0.2432   0.9101
   0.0710   0.7873   0.5122   0.3359
W =
  18.1915        0        0        0
        0   1.4653        0        0
        0        0   0.0000        0
        0        0        0   0.0000
V =
  -0.4469   0.5005   0.7407   0.0336
  -0.8633  -0.2591  -0.3333  -0.2766
   0.2234  -0.2502   0.3436  -0.8771
   0.0710   0.7873  -0.4713  -0.3911
```

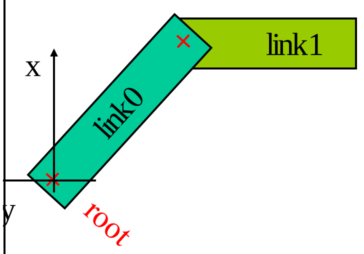
$\det(J^T * J) = 0$

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$
$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V'W^{-1}U'J'b}$




```
W-1 =
   0.0550        0        0        0
        0   0.6824        0        0
        0        0        0        0
        0        0        0        0
>>x = V' * W-1 * U' * J' * bb
x =
  -0.2251
  -0.1281
   0.1125
  -0.1811
```

$\det(J^T * J) = 0$

Norma l^2 pari a 0.0839

NB: Matlab fornisce già V sotto forma di trasposta

Verifica Soluzione

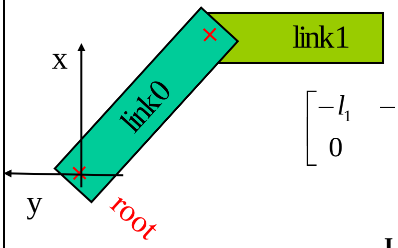
$$J = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V'W^{-1}U'J'b}$

Soluzione mediante pseudo-inversa



$J * \Delta w = \Delta P$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Delta w}} = \underbrace{[1\ \ 0]^T}_{\mathbf{\Delta P}}$$

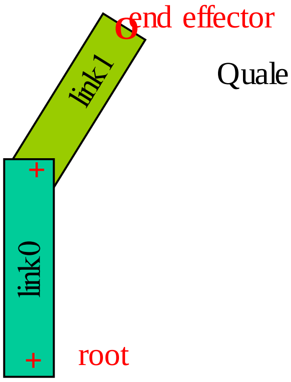
Spostamento ottenuto = spostamento desiderato

<u>**Utilizzo più o meno con la stessa ampiezza tutti i gradi di libertà**</u>

Proprietà della Soluzione

Proprietà: **soluzione a norma minima**

Altre soluzioni possibili (tali per cui $Ax = b$), si potrebbero ottenere, ma aumentano la norma della soluzione



Quale altra soluzione sarebbe possibile per ottenere lo spostamento desiderato: {1 0}?

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P^e_x = 1$ $\Delta P^e_y = 0$

Norma l^2 pari a 1

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point (m < n, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo

Come rendere risolubile il sistema

$dP = J\,d\Theta$ $\min \| dP - J\,d\Theta \|$ $\|d\Theta\|$ a norma minima

Inserisco il vincolo $\|d\Theta\|$ a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare.

Il problema si trasforma in un problema di **regolarizzazione**

$$\min (\| J\,d\Theta - dP \| + \lambda \|d\Theta\|)$$

Dove la norma è intesa in l_2.

$$\min [(J\,d\Theta - dP)^2 + \lambda (d\Theta)^2]$$

Risulta un funzionale quadrato di "facile" minimizzazione

Sviluppo della regolarizzazione

$$\min \left(\| J \, d\Theta - dP \| + \lambda \, \|d\Theta\| \right)$$

$d\Theta$ penalizza ampie variazioni di orientamento

Nel caso di funzione quadratica, il risultato è relativamente semplice

$$[2J^T(J \; d\Theta - dP) + \lambda \; d\Theta]/\delta\theta = 0$$

$$J^T(J \; d\Theta - dP) + \lambda \; d\Theta = 0$$

Da cui risulta:

$$J^T(J \; d\Theta - dP) + \lambda \; d\Theta = 0$$

$$\boxed{d\Theta = (J^TJ + \lambda \; I)^{-1} J^T \; dP)}$$

Soluzione regolarizzata (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

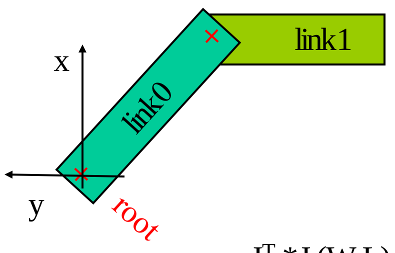
$$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$ $\lambda = 1$

$\det(J^T * J) = 0$

$\det(J^T * J + I) \neq 0$



$$J^T * J \, (W,L) + I = \begin{bmatrix} 4 + \lambda & 4 + 2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4 + 2\sqrt{2} & 7 + 4\sqrt{2} + \lambda & -2 - \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2 - \sqrt{2} & 1 + \lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 + \lambda \end{bmatrix}$$

Esempio regolarizzazione

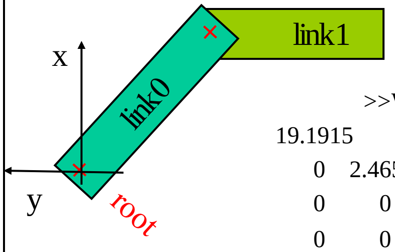
$$J^T * J + I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$$\boxed{x = V'W^{-1}U'b}$$

$\det(J^T * J + I) \neq 0$ >>det = 47.3137



Soluzione con regolarizzazione con $\lambda = 1$

>>Ws =

19.1915	0	0	0
0	2.4653	0	0
0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000

>>dW =

-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

>>dP =

0.9155
0.1021

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato

$\|dW\| = 0.0647$, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Esempio regolarizzazione

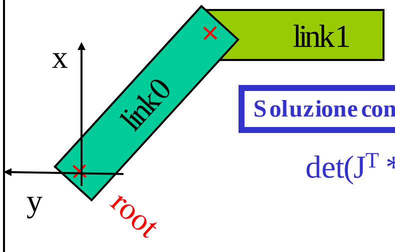
$$J^T * J + \lambda I = \begin{bmatrix} 4+\lambda & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+\lambda & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$$\boxed{x = V'W^{-1}U'b}$$

$\det(J^T * J + \lambda I) \neq 0$



Soluzione con regolarizzazione con $\lambda = 0.01$

$\det(J^T * J + \lambda I) = 0.0027$

>>dW =

-0.2242
-0.1284
0.1121
-0.1798

>>dP =

0.9989
0.0018

$\|dW\| = 0.116$

Soluzione con regolarizzazione con $\lambda = 10$

$\det(J^T * J + \lambda I) = 3.32 \times 10^{-4}$

>>dW =

-0.0804
-0.1162
0.0402
-0.0149

>>dP =

0.5978
0.1494

Come introdurre un peso sui joint

$dP = J\,d\Theta$ min $\| dP - J\,d\Theta \|$ $\|d\Theta\|$ a norma minima

Inserisco il vincolo $\|d\Theta\|$ a norma minima all'interno della funzione costo da minimizzare e peso il costo sui vari joint in modo differente.

$$\min\ (\| J\,d\Theta - dP \| + \lambda\, C\|d\Theta\|)$$

Dove la norma è intesa in l_2 e C è una matrice diagonale

$$\min\ [\ (J\,d\Theta - dP)^2 + \lambda\, C(d\Theta)^2\ ]$$

Risulta un funzionale quadrato di "facile" minimizzazione

Sviluppo della regolarizzazione

$$\min\ (\| J\,d\Theta - dP \| + \lambda\, C\|d\Theta\|)$$

$d\Theta$ penalizza ampie variazioni di orientamento

Nel caso di funzione quadratica, il risultato è relativamente semplice

$$[2J^T(J\ d\Theta - dP) + \lambda\, C\ d\Theta]/\delta\theta = 0$$

$$J^T(J\ d\Theta - dP) + \lambda\, C\ d\Theta = 0$$

Da cui risulta:

$$J^T(J\ d\Theta - dP) + \lambda\, C\ d\Theta = 0$$

$$\boxed{d\Theta = (J^T J + \lambda\, C)^{-1} J^T\, dP)}$$

Esempio regolarizzazione con pesi

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

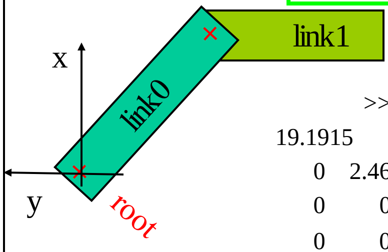
$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: c1 = c2 = c3 = c4 = 1

Incorporiamo λ dentro i c_i

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

>>det = 47.3137



Soluzione con regolarizzazione con pesi unitari

>>Ws =

19.1915	0	0	0
0	2.4653	0	0
0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000

>>dW =

-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

>>dP =

0.9155
0.1021

Spostamento ottenuto $\neq$ spostamento desiderato

||dW|| = 0.2588, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Esempio regolarizzazione con pesi non uguali

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

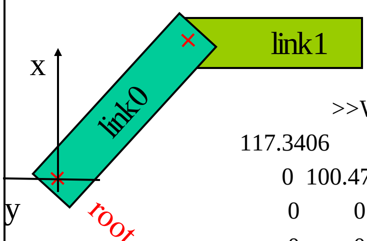
$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

Supponiamo: c1 = c2 = 100; c3 = c4 = 1

>>det = 4.3539e+004



Soluzione con regolarizzazione con pesi inferiori alle traslazioni

>>Ws2 =

117.3406	0	0	0
0	100.4701	0	0
0	0	1.9953	0
0	0	0	1.8510

>>dW =

-0.0093
-0.0157
0.4639
-0.0111

Utilizzo molto Tx

>>dP =

0.5361
0.0111

Spostamento ottenuto $\neq$ spostamento desiderato

||dW|| = 0.1161, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Esempio regolarizzazione più corretto

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+p_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+p_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+p_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+p_4 \end{bmatrix}$$

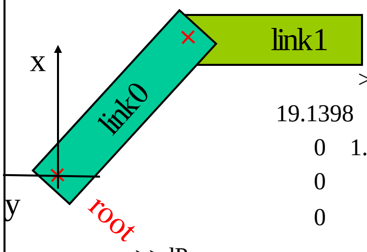
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: c1 = c2 = 1; c3 = c4 = 0.01



\>>det = 1.1992

\>>Ws2 =

19.1398	0	0	0
0	1.9568	0	0
0	0	0.5185	0
0	0	0	0.0618

\>>x

-0.0172
-0.0288
0.8589
-0.0403

Utilizzo quasi esclusivamente Tx

\>>dP =

0.9914
0.0004

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato (ma molto vicino)

||dW|| = 0.2151, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].
Inoltre il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 100 per le componenti di dTx e dTy

Esempio regolarizzazione più corretto

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

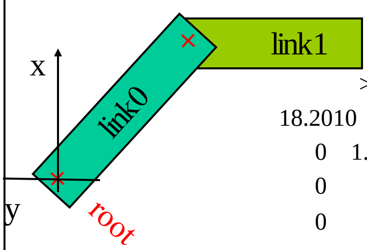
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: c1 = c2 = 0.01; c3 = c4 = 0.0001



\>>det = 1.17×10^{-4}

\>>Ws2 =

18.2010	0	0	0
0	1.4686	0	0
0	0	0.0068	0
0	0	0	0.0006

\>>x

-0.0173
-0.0290
0.8663
-0.0410

Utilizzo quasi esclusivamente Tx

\>>dP =

0.9999
0.0000

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato (ma molto vicino)

||dW|| = 0.2170, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].
Inoltre il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 100 per le componenti di dTx e dTy

Sommario

- Più gradi di libertà che end-point ($m < n$, sistemi sottodeterminati)
- Soluzione algebrica
- Regolarizzazione: privilegio di alcuni parametri di controllo