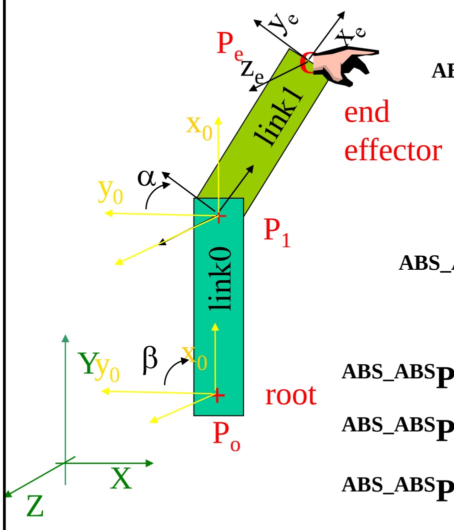
La cinematica Inversa ed il Jacobiano

Prof. Alberto Borghese

Riassunto

- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = {}^{ABS\_ABS}_{\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;e}\mathbf{A(t)} \;\; {}^{e}\mathbf{P}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x\,\mathbf{(t)} = \mathbf{f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

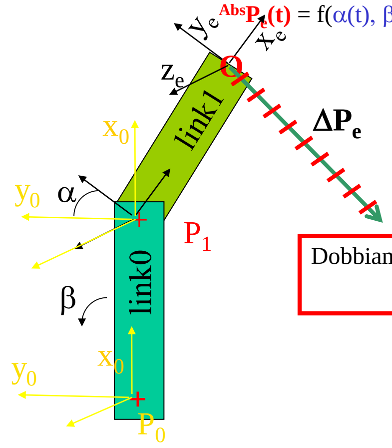
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y\,\mathbf{(t)} = \mathbf{f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z\,\mathbf{(t)} = \mathbf{f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)}$$

Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

$^{Abs}\mathbf{P_e(t)}$ = f($\alpha(t)$, $\beta(t)$, $T_x(t)$, $T_y(t)$| l_0, l_1) = $^{e}_{Abs}A(t)\,{}^{e}Pe_e(t)$



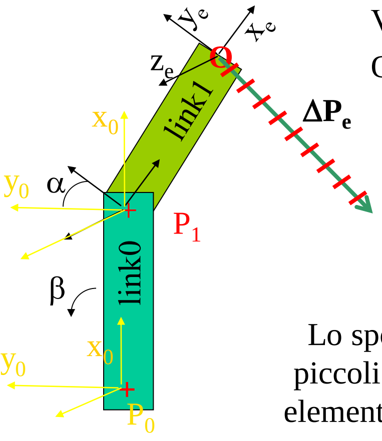
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0 \cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0 \sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
$\alpha(t) = f^*(l_0, l_1, P_e(t))$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

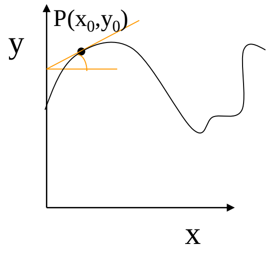
Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Linearizzazione – 1 variabile

$$y_0 = f(x_0)$$

$$dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} dx^2 + \ldots$$

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \Delta x \Rightarrow y = mx + q$$



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

- Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di P(xo,yo).
- Si ottiene un'approssimazione a meno di infinitesimi del secondo ordine.

Cosa succede per funzioni di più variabili (**P(t)** = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1))?

Sviluppo in serie di Taylor di funzioni di più variabili

z = f(x,y)

$$z - z_o = \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P=P_0} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P=P_0} dy}_{\boxed{\text{Parte lineare}}} + \frac{1}{2}\left\{ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P=P_0} dx^2 + 2\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P=P_0} + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P=P_0} dy^2 \right\} + \ldots$$

Sistema di equazioni lineari

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)|\ l_0, l_1)$.

Chiamiamo $\mathbf{W_k} = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{yk})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{yk})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} (\beta - \beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} (T_y - T_{yk})$$

Il Jacobiano

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

P_x(t) = f_x(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).
P_y(t) = f_y(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).
P_z(t) = f_z(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

J

Chiamiamo **$W_k = [\alpha_\kappa, \beta_\kappa, T_{xk}, T_{yk}]$** il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Caratteristiche del Jacobiano

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale ∀valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Come vengono trattate le velocità

Dividendo entrambi i membri per Δt si ottiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}\,\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

Elemento chiave è il Jacobiano, **J**.

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale $\forall$valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Jacobiano e velocità

$d\mathbf{P_e(t)} = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\, d\mathbf{W(t)} \;\Rightarrow\; d\mathbf{P_e(t)} / dt = J(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\, d\mathbf{W(t)} / dt$

Chiamiamo $\mathbf{W(t_k)}= [A(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)]$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\boxed{V_{\mathbf{P_e}}(t_k) = J(\mathbf{W}(\mathrm{t}_k), \mathbf{L})\dot{W}(\mathrm{t_k})}$$

Parametri liberi

Parametri geometrici

$\forall$k, cambia il valore di J, l'espressione analitica rimane valida.

Osservazioni sul Jacobiano

$$
\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\
\left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\
\left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}
$$

$$\Delta \mathbf{P_e(t)} = \mathrm{J}(\mathbf{W(t)}, \mathbf{L})\Delta\mathbf{W(t)}$$

Chiamiamo $\mathbf{W_k(t)}$= [A(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare dallo spazio dei parmetri liberi a quello dell'end-point: $\Delta\mathbf{W(t)}$ -> $\Delta\mathbf{P_e(t)}$

Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!

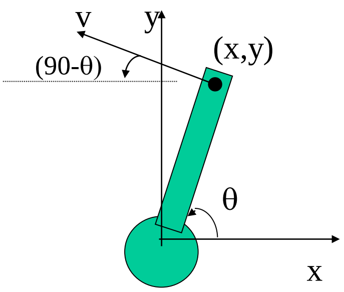
Riassunto

- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

Esempio di determinazione del Jacobiano

$x = r\cos(\theta)$

$y = r\sin(\theta)$



$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\vartheta\\ r\cos\vartheta\end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$

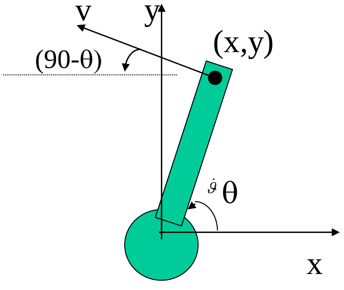
$\mathbf{V = \omega \Lambda r}$ Sono due espressioni equivalenti $\forall$k $\mathbf{V} = \mathbf{J}_{\theta=\theta k}\dot{\mathbf{\Theta}}$

$\mathbf{V}_{2x1}$ $\mathbf{J}_{2x1}$ $\dot{\mathbf{\Theta}}_{1x1}$

Esempio di determinazione del Jacobiano

$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\vartheta\\ r\cos\vartheta\end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$



$\theta_k = 0$

$V_x = -r\sin(0)\ \dot{\vartheta} = 0\ \dot{\vartheta} = 0$

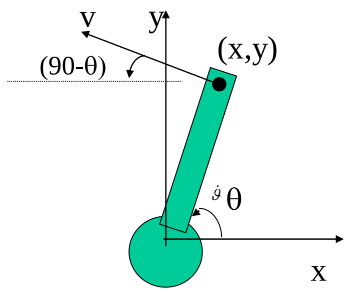
$V_y = r\cos(0)\ \dot{\vartheta} = r\ \dot{\vartheta}$

$\mathbf{V = \omega \Lambda r}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k\\ 0 & 0 & \dot{\vartheta}\\ r & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ r\dot{\vartheta}\\ 0\end{bmatrix}$

Esempio di determinazione del Jacobiano

$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$

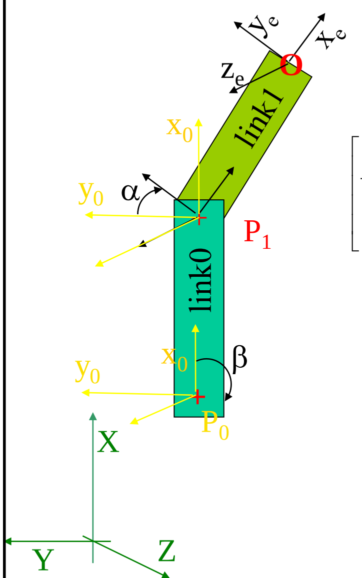


$V_x = -r \sin(\theta_k)\ \dot{\vartheta}$

$V_y = r \cos(\theta_k)\ \dot{\vartheta}$

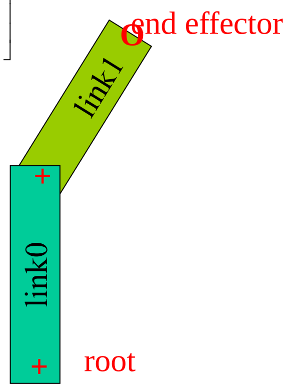
V = ωΛr ⟹ $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ r\cos\vartheta & r\sin\vartheta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin(\vartheta)\dot{\vartheta} \\ r\cos(\vartheta)\dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix}$

Cinematica diretta



$${}^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{\ \ \ \ \ e}\mathbf{A}\ {}^{P0\_L0}\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1\cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1\sin\alpha\sin\beta + T_x \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Il Jacobiano dell'esempio

$$
{}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & 0 & l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta+T_x \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta+T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin\alpha\cos\beta - l_1\cos\alpha\sin\beta & -l_1\cos\alpha\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta - l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ +l_1\sin\alpha\sin\beta - l_1\cos\alpha\cos\beta & -l_1\cos\alpha\cos\beta + l_1\sin\alpha\sin\beta - l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

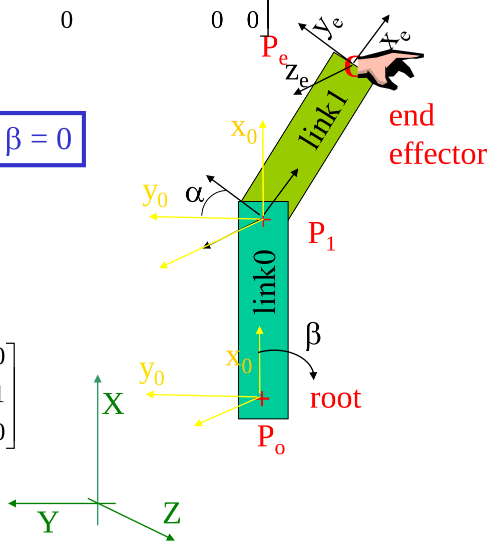
Esempio di calcolo dello spostamento – I

$$
\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

$W_k = [0, 0, P_{ox}, P_{oy}]$

$$
\mathrm{J}(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1-l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$



Esempio di calcolo dello spostamento – II

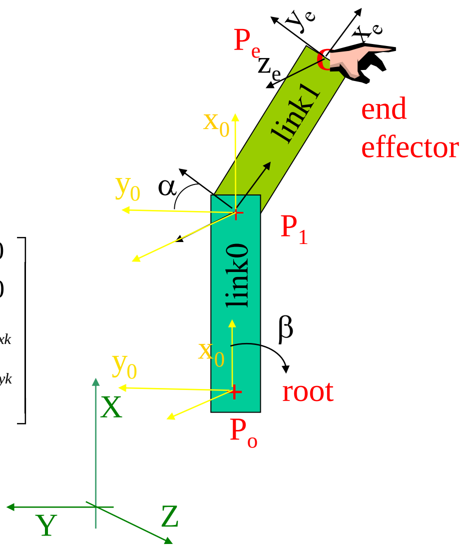
Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

$$J(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

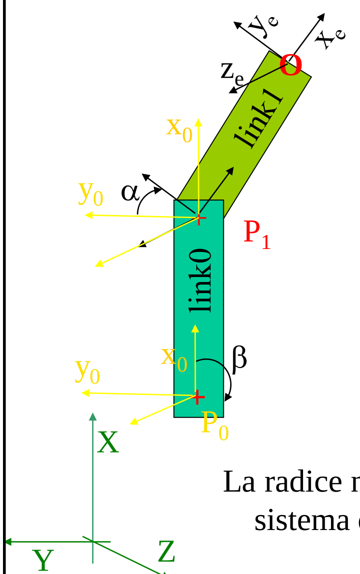
$$\boxed{\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t), \mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ -l_0\Delta a - (l_0 + l_1)\Delta\beta + T_y \\ 0 \end{bmatrix}$$



Caso semplificato



Elimino 2 gradi di libertà: Tx e Ty.

$${}^{\mathbf{P0\_ABS}}\mathbf{P} = {}^{\mathbf{ABS\_ABS}}_{\quad\mathbf{e}}\mathbf{A}\;{}^{\mathbf{P0\_L0}}\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1\cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1\sin\alpha\sin\beta \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La radice non si sposta rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Il Jacobiano dell'esempio semplificato

$$\underset{\text{ABS\_ABS}}{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta \\ -(l_1 \cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha \cos\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Non tutti gli spostamenti sono possibili

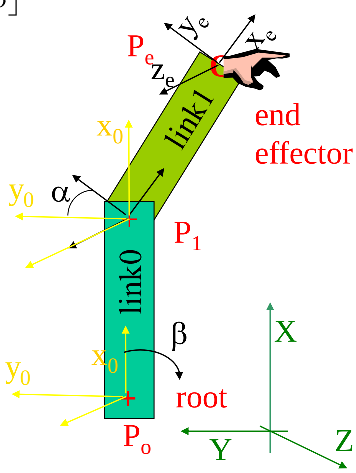
$$\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $\mathrm{W_k} = [0, 0]$

$$\mathrm{J}(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t),\mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} (P_x - P_{x_k}) \\ (P_y - P_{y_k}) \\ (P_z - P_{z_k}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$

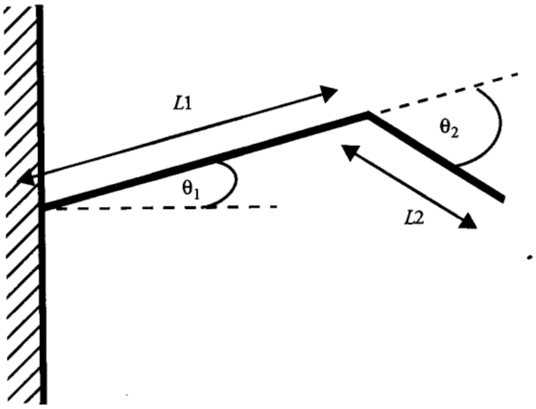
$$\begin{pmatrix} (P_x - P_{x_k}) \\ (P_y - P_{y_k}) \\ (P_z - P_{z_k}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0\Delta a + (-l_0 + l_1)\Delta\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

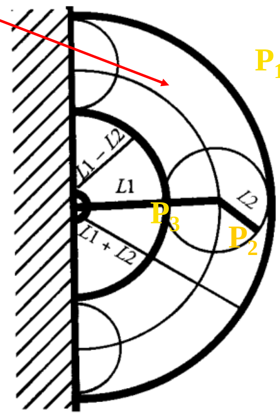


E' possibile spostarsi <u>solamente</u> in direzione perpendicolare al braccio (lungo la perpendicolare al braccio) per $\alpha = \beta = 0$

Soluzione diretta

Working space





Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \leq \| P \| \leq L_1 + L_2$

Possibili configurazioni:
P_1 - nessuna soluzione.
P_2 - due soluzioni.
P_3 - una soluzione.

Riassunto

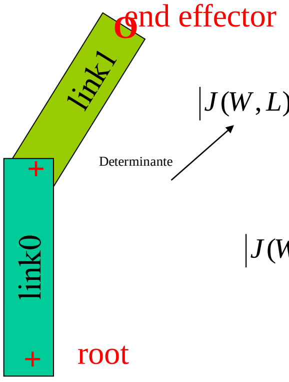
- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi

Il Jacobiano dell'esempio semplificato: determinante

$$
{}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{P} = \quad = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Consideriamo il caso piano (x,y) e Tx ≡ Ty ≡ 0 e coordinate non omogenee.

$$
\mathrm{J}(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}
$$



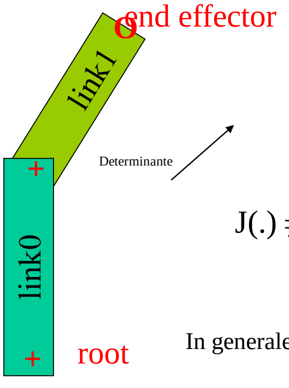
$$
|J(W,L)| = l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)
$$

$$
|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)
$$

Condizioni di singolarità

$$
|J(W,L)| = l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l^2{}_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)
$$

$$
|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)
$$



$$
\mathrm{J}(.) \neq 0 \quad \begin{cases} \alpha + \beta \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases}
$$

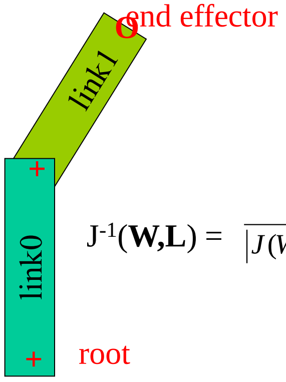
$$
\mathrm{J}(.) \neq 0 \quad \begin{cases} \alpha + \beta \neq 90 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 90 \pm 180 \end{cases}
$$

In generale, $\alpha \neq 0 \pm 180$. Definisce la frontiera dello spazio di lavoro

Inverso del Jacobiano dell'esempio semplificato

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

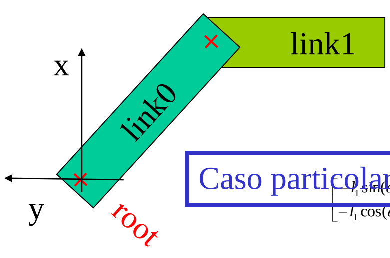


$$\left|J(W,L)\right| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta \cos(\alpha+\beta)$$

$$J^{-1}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \frac{1}{\left|J(W,L)\right|}\begin{bmatrix} -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta & +l_1 \sin(\alpha+\beta) + l_0 \sin\beta \\ +l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Il Jacobiano: determinante – caso particolare

$$^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Consideriamo il caso piano e Tx ≡ Ty ≡ 0

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

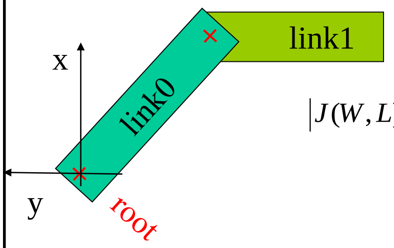
J(**W,L**) =

$$J([45,45],[2,2]) = \begin{bmatrix} -2 & -2-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \det(J) = 2\sqrt{2}$$

Inverso del Jacobiano: caso particolare

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J^{-1}(\mathbf{W,L}) = \frac{1}{|J(W,L)|}\begin{bmatrix} -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & +l_1\sin(\alpha+\beta)+l_0\sin\beta \\ +l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$



$$|J(W,L)| = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$J^{-1}(\mathbf{[45, 45],[2,2]}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -2\frac{\sqrt{2}}{2} & +2+2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Situazione del movimento

Posizione iniziale del braccio: $\left[\sqrt{2}; -\left(2+\sqrt{2}\right)\right]$

Angoli iniziali: [45, 45]

Posizione finale desiderata del braccio: $[2; -2]$

Spostamento desiderato del braccio: $\left[2-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Angoli finali del braccio: [90, 0]

Posizione finale raggiunta:

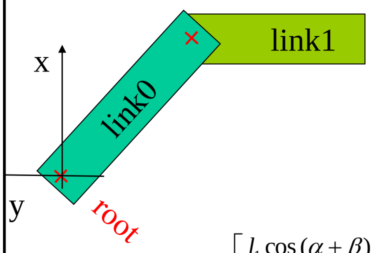
Spostamento del braccio:

???

Calcolo di [Δα, dβ]

$$\begin{bmatrix}\Delta\alpha \\ \Delta\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{2} \\ -1\end{bmatrix}_{radianti} = \begin{bmatrix} 81.028 \\ -57.2958\end{bmatrix}_{gradi}$$

Angoli iniziali: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P = [2-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$



W_{fin} = [45 + 81.028; 45 -57.2958] = [126.028; -12.2958]

Angoli finali desiderati [90, 0]

Posizione iniziale: $\left[\sqrt{2}; -2-\sqrt{2}\right]$

Posizione finale ottenuta: $[1.1492; -1.4050]$

$${}^{e}P = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta \\ -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*(-0.4025)+2*0.9771 \\ -2*0.9154-2*(-0.2130)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1492 \\ -1.4050\end{bmatrix}$$

Situazione del movimento

Posizione iniziale del braccio: $\left[\sqrt{2}; -\left(2+\sqrt{2}\right)\right]$

Posizione finale desiderata del braccio: $[2; -2]$

Posizione finale desiderata dell'avambraccio: $[2; 0]$

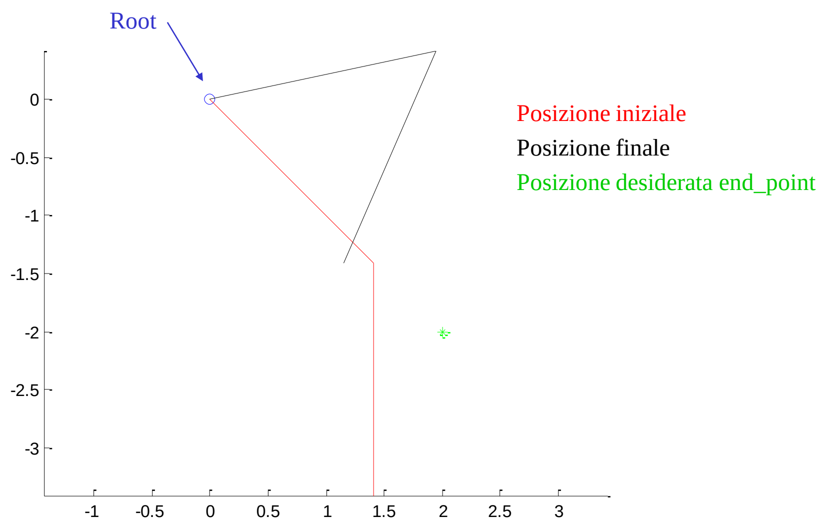
Spostamento desiderato del braccio: $\left[2-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Posizione raggiunta dal braccio: $[1.1492; -1.4050]$

Posizione raggiunta dall'avambraccio: $[1.9541; -0.4259]$

Spostamento effettuato del braccio: $\left[1.1492-\sqrt{2}; -1.4050+2+\sqrt{2}\right]$

Rappresentazione grafica

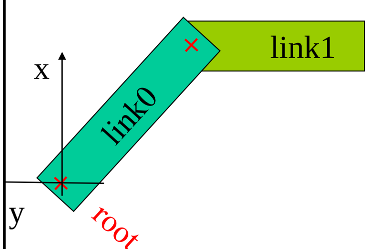


Verifica della soluzione

$$\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\end{bmatrix} = J\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -2-\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}_{radianti} = \begin{bmatrix}-2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}\\ +\sqrt{2}\end{bmatrix} =$$

J(**[45,45],[2,2]**)

$$\begin{bmatrix}2-\sqrt{2}\\ +\sqrt{2}\end{bmatrix} =$$



Spostamento desiderato del braccio

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ $dP = [2-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

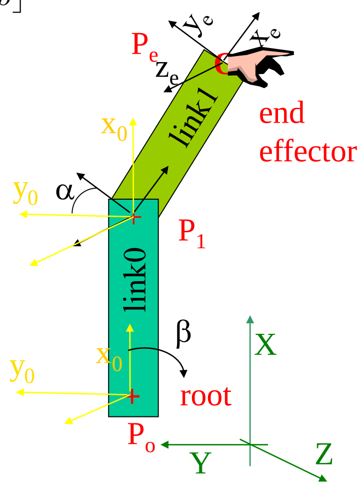
Caso indeterminato

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Caso particolare: } \alpha = \beta = 0}$ $\quad W_k = [0, 0]$

$$J([0,0],[2,2]) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t), \mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$



J(.) = 0 Sistema indeterminato

$P\text{-}P_x = 0$

$P\text{-}P_y = -l_0\alpha - (l_0+l_1)\,\beta$ ⟶

$P\text{-}P_x = 0$

$\alpha = \alpha \quad \beta = [(P\text{-}P_y) + l_0\alpha] / -(l_0+l_1)$

Cinematica inversa

Parto da una configurazione iniziale definite da un certo valore dei parametri di controllo w_{ini} e da una posizione dell'end-point $P_{ini} = f(w, L)$

Ripeto (eventualmente diminuendo il passo di spostamento)

1) Identifico ΔP dalla posizione corrento verso la posizione finale.
2) Calcolo il Jacobiano con i valori dei parametri correnti, w.
3) Calcolo invertendo il sistema lineare il valore Δw associato ($J\Delta w = \Delta P$).
4) Calcolo il nuovo valore dei parametri di controllo: $w + \Delta w$.
5) Calcolo il nuovo valore effettivo della posizione dell-end point: $P_{new} = f(w + \Delta w, L)$. In generale, $P_{new} \neq P + \Delta P$.

Fino a quando non arrive sufficientemente vicino a P_{finale}.

Riassunto

- Il Jacobiano
- I sistemi lineari
- Determinazione dei parametri liberi