



Cinematica degli scheletri



Corso di Realtà Virtuale
Laurea Magistrale in Informatica
Università degli Studi di Milano
Prof. Alberto Borghese
Laboratorio di Applied Intelligent Systems (Ais-Lab)
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it



A.A. 2018-2019

<http://borghese.di.unimi.it>



Riassunto



- **Dall'end-effector alla base.**
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- La cinematica diretta.
- Introduzione alla cinematica inversa.

A.A. 2018-2019

2/33

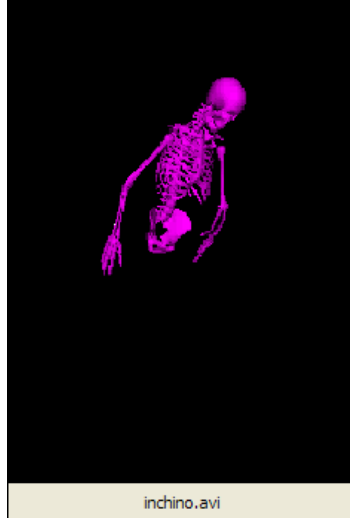
<http://borghese.di.unimi.it>



Cinematica di uno scheletro



Unregistered HyperCam



inchino.avi

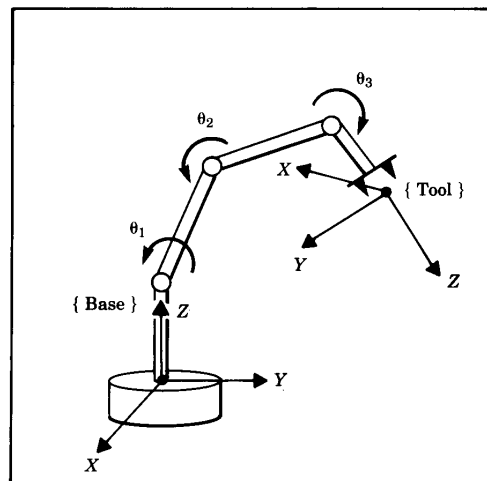
Curve di animazione associate ai gradi di libertà.



Cinematica diretta



Conosco il valore dei joint
(angolo o offset) \rightarrow
posizione ed orientamento
dell'end-point.



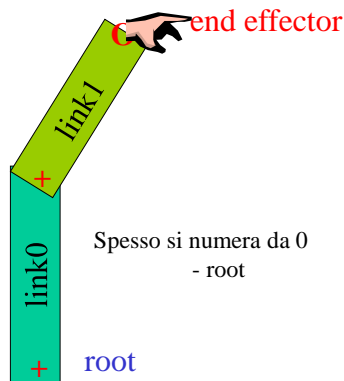
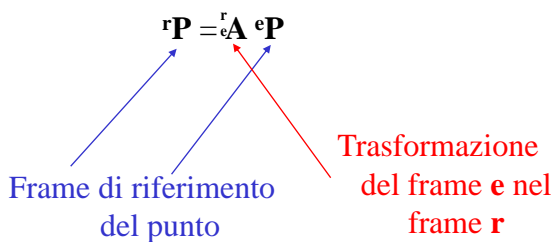
La cinematica viene descritta come sequenza di posizioni.



Convenzioni



$$\begin{bmatrix} {}^r X_P \\ {}^r Y_P \\ {}^r Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^e X_P \\ {}^e Y_P \\ {}^e Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

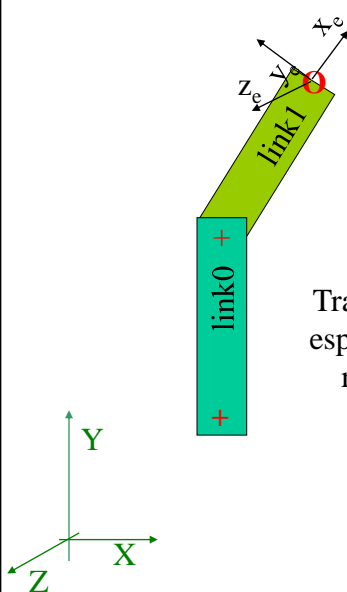


Posizione dei segmenti (I)

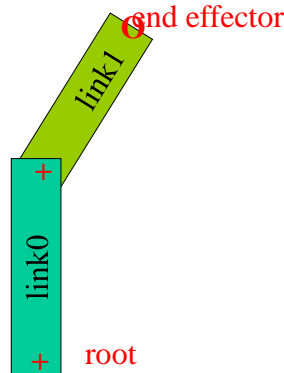


$${}^e P = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

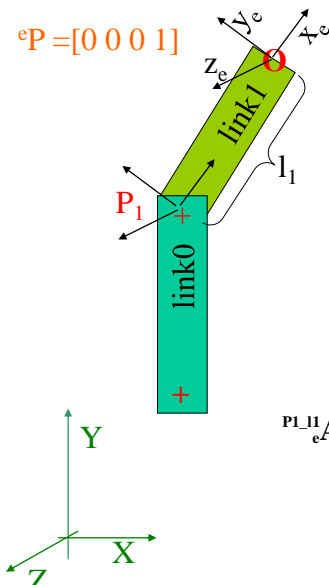
Punto espresso nel frame dell'end-effector.



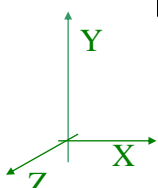
Trasformiamo ${}^e P$ fino ad esprimerlo nel sistema di riferimento assoluto XYZ: ${}^{abs} P$.



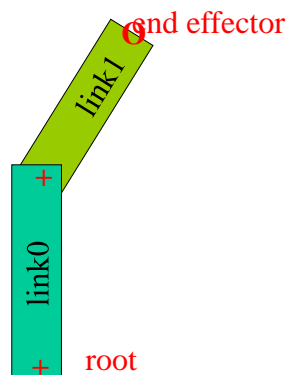
Posizione dei segmenti (II)



$${}^{P1}L1P = {}^{P1}L1A eP = [l_1, 0, 0, 1]$$

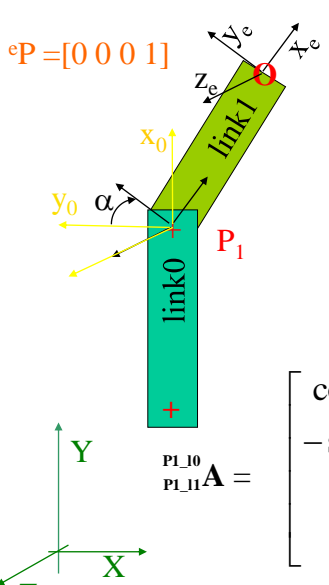


$${}^{P1}L1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



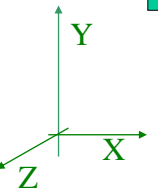
A.A. 2018-2019 7/33 http://borghese.di.unimi.it/

Posizione dei segmenti (III)

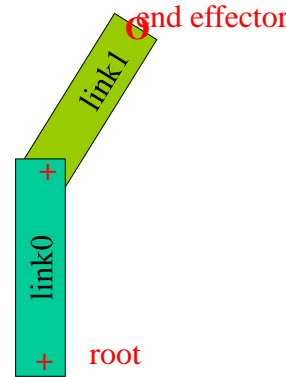


$${}^{P1}L1P = [l_1, 0, 0, 1]$$

$${}^{P1}L0P = {}^{P1}L1A {}^{P1}L1P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$${}^{P1}L1A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2018-2019 8/33 http://borghese.di.unimi.it/



Posizione dei segmenti dall'end-point

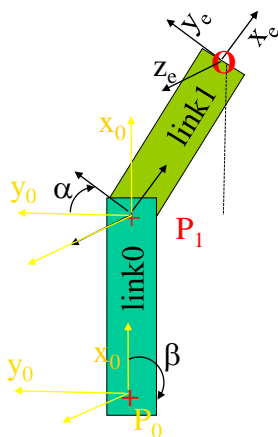


$${}^{P1_0}{}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Esempio



$${}^{P1_0}{}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$${}^{P1_0}{}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P1_0} \mathbf{P} = {}^{P1_0}{}_e \mathbf{A} {}^e \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Posizione dei segmenti (IV)

$eP = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

$P_{0_L0}P = {}^{P_{0_10}}A \ P_{1_L0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P_{1_L0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}^{P_{0_10}}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Diagram labels: link0, link1, end effector, root, +, Y, X, Z, Y0, X0, P0, Yc, Xc, Zc, P1, alpha.

A.A. 2018-2019 11/33 http://borghese.di.unimi.it/

Posizione dei segmenti (V)

$eP = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

$P_{0_ABS}P = {}^{P_{0_10}}A \ P_{0_L0}P = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}^{P_{0_ABS}}A = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P_{0_L0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Diagram labels: link0, link1, end effector, root, +, Y, X, Z, Y0, X0, P0, Yc, Xc, Zc, P1, alpha, beta.

A.A. 2018-2019 12/33 http://borghese.di.unimi.it/



Posizione dei segmenti (VI)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

A.A. 2018-2019 13/33 <http://borghese.di.unimi.it/>



Posizione dei segmenti: fattorizzazione



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

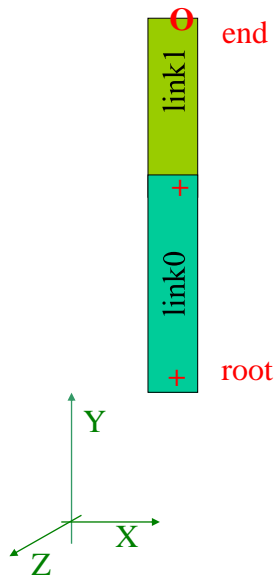
${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = {}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A.A. 2018-2019 14/33 <http://borghese.di.unimi.it/>



Esempio di calcolo della posizione



end effector

$$\alpha = \beta = 0$$

$$\mathbf{ABS_ABSP} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_0 + T_x \\ T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2018-2019

15/33

<http://borghese.di.unimi.it/>



Riassunto



- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- La cinematica diretta.
- Introduzione alla cinematica inversa.

A.A. 2018-2019

16/33

<http://borghese.di.unimi.it/>



Dall'end-effector alla base



- Il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della **geometria** (lunghezze dei segmenti) e dei **parametri liberi** (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).
- Le rotazioni vengono definite in un **sistema di riferimento locale**.
- Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre....

$${}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = [\begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} & {}^{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} & {}^{\text{P0_I0}}\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I0}}\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \end{matrix}] {}^{\text{e}}\mathbf{P}$$

fattorizzare le matrici di trasformazione.

$${}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{e}\mathbf{A} = \begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} & {}^{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} & {}^{\text{P0_I0}}\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I0}}\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \end{matrix}$$



Osservazioni sulle matrici di trasformazione, A



Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base.

A è funzione di:

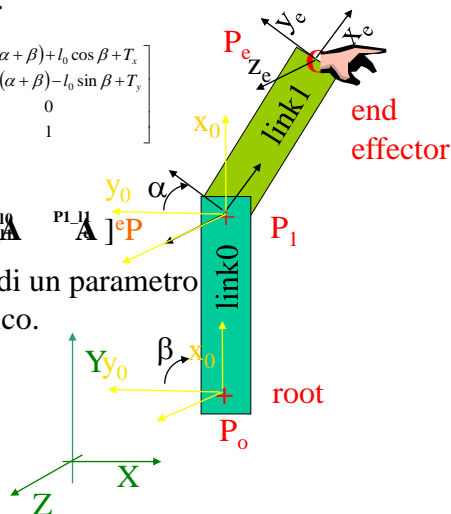
- Geometria
- Parametri liberi

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = [\begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} & {}^{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} & {}^{\text{P0_I0}}\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I0}}\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \end{matrix}] {}^{\text{e}}\mathbf{P}$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$${}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = [\begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A}(T) & {}^{\text{P0_ABS}}\mathbf{A}(\beta) \\ {}^{\text{P0_I0}}\mathbf{A}(l_0) & {}^{\text{P1_I1}}\mathbf{A}(\alpha) & {}^{\text{P1_I0}}\mathbf{A}(l_1) \end{matrix}] {}^{\text{e}}\mathbf{P}$$





Quante matrici di trasformazione?



- Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
- Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
- Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.

- Notazione molto generale (approccio costruttivo).
- Notazione prolissa.



Riassunto



- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- **La cinematica diretta.**
- Introduzione alla cinematica inversa.

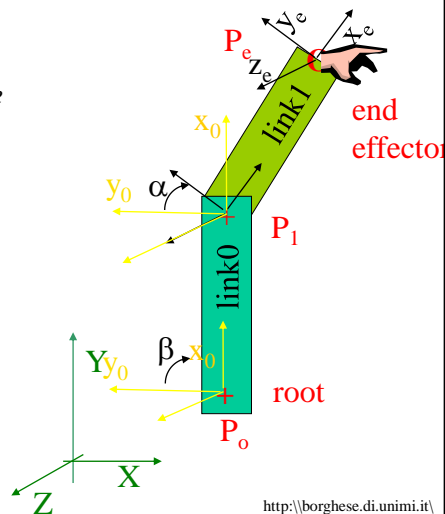


La cinematica diretta



Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento di ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint, dalla base all'end-effector.



Come animare uno scheletro



Data la sequenza di angoli (**relativi**) è possibile determinare istante per istante la posizione del braccio robotico.

Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?

Joint space (peso dei joint)

Rotazione attorno a P_0 (angolo β)

Rotazione attorno a P_1 (angolo α)

La posizione dell'end effector è diversa a parità di rotazione.

A.A. 2018-2019 23/33 <http://borghese.di.unimi.it/>

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)

end effector

$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = {}_{ABS_ABS}A(t) \ e^P$$

$${}_{ABS_ABS}P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

A.A. 2018-2019 24/33 <http://borghese.di.unimi.it/>



Descrizione cinematica diretta



$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Sequenza temporale di $[\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)] \rightarrow$ sequenza temporale di ${}_{ABS_ABS}P(t)$.

imi.it\



Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$${}_{ABS_ABS}P(t) = {}_{ABS_ABS}A(t) \cdot P$$

$${}_{ABS_ABS}P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Ciascuna di queste funzioni è rappresentata come prodotto di una riga della matrice **A** per **P**.



Riassunto



- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- La cinematica diretta.
- **Introduzione alla cinematica inversa.**



La cinematica inversa



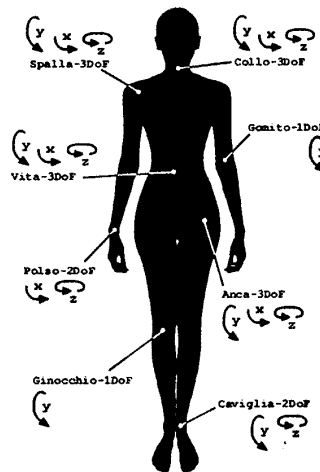
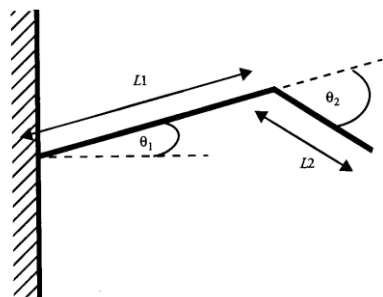
Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.



Problema sotto-determinato (over-constrained).
Comportamento stereotipato. Perché?



Cerniere 3D



∞^1 soluzioni

NB: gli umani ne scelgono una sola.

Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.

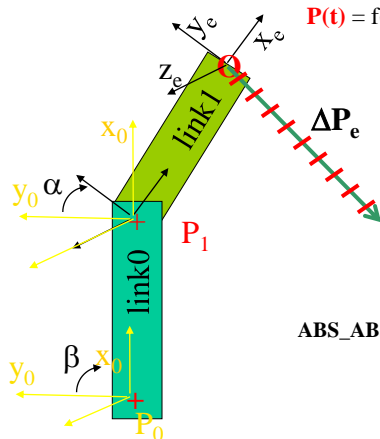


Soluzione differenziale



Consideriamo la trasformazione joint \rightarrow end_point.

$$\mathbf{P}(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$



$$\text{ABS_ABS}\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

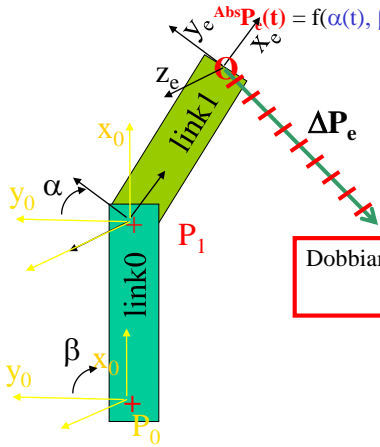


Soluzione differenziale



Consideriamo la trasformazione joint \rightarrow end_point.

$${}^{Abs}P_e(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^eA(t) {}^eP_e(t)$$



$${}^{ABS_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:

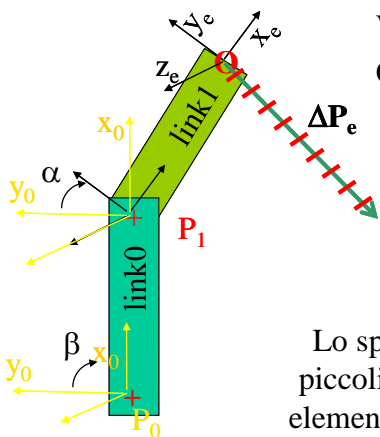
$$\alpha(t) = f^*(l_0, l_1, P_e(t))$$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!



Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.



Riassunto



- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- La cinematica diretta.
- Introduzione alla cinematica inversa.