



Realtà Virtuale From 2D to 3D

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano



Sommario

- Algoritmi di calibrazione
- Ricostruzione 3D



Approssimazione mediante DLT



Collinearità:

$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

DLT:
(Direct Linear Transform).

$$x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} + 1}$$

I parametri esterni ed interni sono rappresentati con gli 11 coefficienti L_i

$$y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} + 1}$$



DLT ed equazioni di collinearità



$$L_1 = \frac{x_0 \cdot r_{31} - f_x \cdot r_{11}}{D}; \quad L_2 = \frac{x_0 \cdot r_{32} - f_x \cdot r_{12}}{D}; \quad L_3 = \frac{x_0 \cdot r_{33} - f_x \cdot r_{13}}{D};$$

$$L_4 = \frac{x_0 + f_x \cdot (r_{11} X_0 + r_{12} Y_0 + r_{13} Z_0)}{D};$$

$$L_5 = \frac{y_0 \cdot r_{31} - f_y \cdot r_{21}}{D}; \quad L_6 = \frac{y_0 \cdot r_{32} - f_y \cdot r_{22}}{D}; \quad L_7 = \frac{y_0 \cdot r_{33} - f_y \cdot r_{23}}{D};$$

$$L_8 = \frac{y_0 + f_y \cdot (r_{21} X_0 + r_{22} Y_0 + r_{23} Z_0)}{D};$$

$$L_9 = \frac{r_{31}}{D}; \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}; \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D};$$

11 PARAMETRI da trovare =>

$$D = -(r_{31} X_0 + r_{32} Y_0 + r_{33} Z_0)$$

Richiede **almeno 6 control points** di **coordinate note**
-> stima ai minimi quadrati non iterativa

Trovati gli 11 parametri L_i , ricavo i parametri interni ed esterni, che utilizzo come approssimazione iniziale per il bundle adjustment



Calibrazione con punti in posizione nota



- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.
Ho $9 + D$ parametri aggiuntivi.

Ho bisogno di $(9 + D) / 2$ punti di controllo.



Bundle adjustment



Inizializzazione

Correzione dei parametri in modo tale che il fascio di rette passante per i punti di controllo e il centro di proiezione vada a coincidere con i punti proiettati.

Procedura iterativa.

Analisi della qualità della soluzione (correlazione tra le variabili / stima dell'errore sui parametri)



Inizializzazione dei parametri



Soluzione determinata con Bundle Adjustment.
 => linearizzazione delle equazioni collinearita'
 => **approssimazioni iniziali** delle incognite

Interior parameters: Focal length, f , Principal point (x_0, y_0) .
 Exterior parameters: Orientation (ω, ϕ, κ) and Position (X_0, Y_0, Z_0) .
 Distortion parameters: $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$

Inizialization with distortion parameters set equal to 0.

A.A. 2018-2019

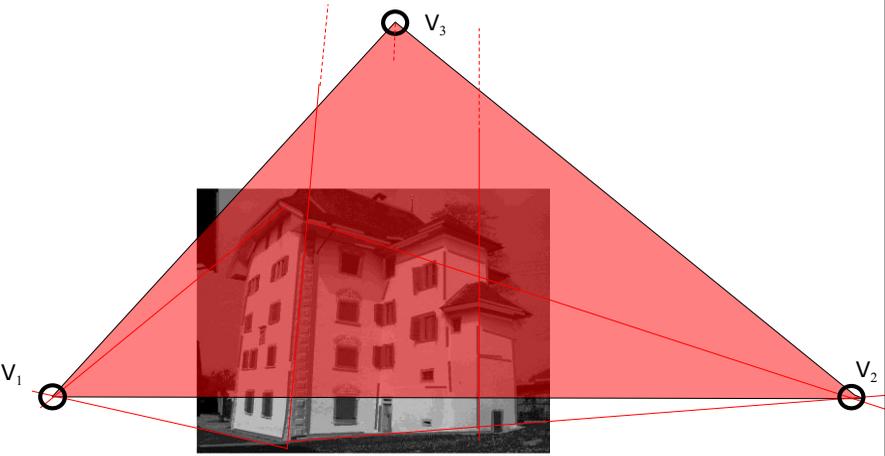
7/45



Inizializzazione dei parametri interni tramite vanishing points



Intersezione di linee parallele nello spazio 'oggetto' trasformate nello spazio 'immagine' da una trasformazione prospettiva della camera.



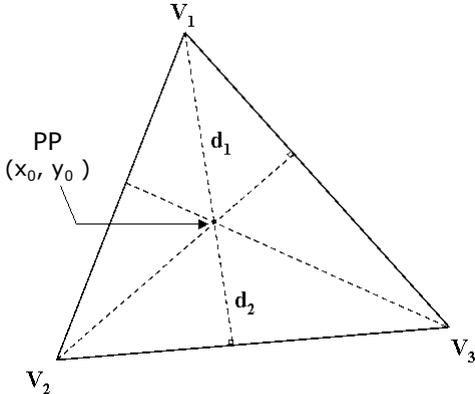
A.A. 2018-2019

8/45



Stima del punto principale





PP: ortocentro del triangolo

$$c = \sqrt{d_1 * d_2}$$

Problemi:

- Quali linee estrarre?
- Come trovarle (autom/manual)?
- Come trovare i 3 vertici del triangolo?

A.A. 2018-2019

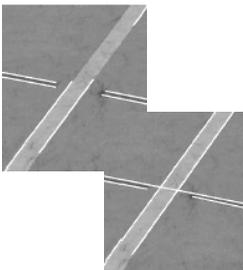
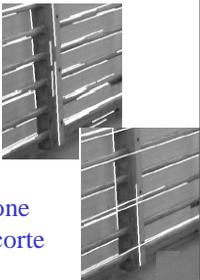
9/45



Algoritmo per determinare i vanishing points



- Estrazione automatica di edges/linee con operatore di Canny.
- Aggregazione delle linee piu' corte usando la loro pendenza e distanza reciproca.
- Per ogni linea, calcolare pendenza e distanza dal centro dell'immagine.
- Plottare pendenza e distanza.
- Classificazione delle linee in 3 gruppi (di solito <40°; ca 90°; >140°).
- Intersezione delle linee di ciascun gruppo per calcolare il punto all'infinito (pto di fuga).
- Calcolo di PP e focale.

Aggregazione delle linee corte

A.A. 2018-2019

10/45



La calibrazione come problema di stima



$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$\mathbf{x} = F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \mid X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})$$

$$\mathbf{y} = G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \mid X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})$$

Dati:

I punti nello spazio 3D: $\{X, Y, Z\}$

I punti misurati sul piano immagine $\{x, y\}$

Dobbiamo determinare:

I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

A.A. 2018-2019

11/45

Cosa serve?



Impostazione della Calibrazione



$$\mathbf{x} = F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \mid X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})$$

$$\mathbf{y} = G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \mid X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})$$

- Per ogni punto immagine (x, y) ho 2 equazioni di collinearità
- Combinando le equazioni per M punti di controllo ho un sistema di $2M$ equazioni non-lineari.

INPUT:

- coordinate 2D di punti misurati sulle immagini
- coordinate 3D dei punti di controllo.

OUTPUT (incognite):

- parametri d'orientamento interno e esterno
- parametri aggiuntivi (AP)

A.A. 2018-2019

12/45



Visione statistica della determinazione dei parametri



$x - F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) = e_x$
 $y - G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) = e_y$

Osservazioni

Modello

$$e_x = e_x^s + e_x^r$$

$$e_y = e_y^s + e_y^r$$

← Errore randomico (di misura)

Errore totale

Errore sistematico (di modellazione)

Minimizzo $e_x^2 + e_y^2$
Minimo per $e_x^s = e_y^s = 0$.

A.A. 2018-2019

13/45



Minimizzazione dell'errore



$x - F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) = e_x$
 $y - G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) = e_y$

Minimizzo $e_x^2 + e_y^2$

Minimizzo la differenza tra le osservazioni misurate ed i valori predetti dal modello per uno stesso punto (X,Y,Z).

Minimizzo $(x - F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}))^2 + (y - G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}))^2$

rispetto a che cosa?

A.A. 2018-2019

14/45



Visione geometrica della determinazione dei parametri (**bundle adjustment**)



Minimizzo $(x - F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})^2 + (y - G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})^2$

Misure

Proiezione prospettica

Regolazione dei parametri che determinano il fascio di rette retro-proiettate sul piano immagine attraverso il centro di proiezione.

Bundle-adjustment. Minimizzazione dell'errore di retro-proiezione.

A.A. 2018-2019
15/45

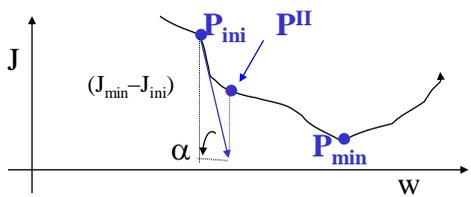


Minimizzazione tramite gradiente



Minimizzo $J(\cdot)$ rispetto ai parametri.

Tecnica del gradiente applicata alla minimizzazione di funzioni non-lineari di **una variabile**: $J = J(w|\dots)$.



La derivata, mi dà due informazioni:

- 1) In quale direzione di w , la funzione decresce.
- 2) Quanto rapidamente decresce.

Definisco uno spostamento arbitrario lungo la pendenza: maggiore la pendenza maggiore lo spostamento. Mi muovo lungo la direzione della pendenza, arrivo in P^{II} . Calcolo $J(w^{II})$.

Da qui riparto fino a quando non arrivo in P_{min} .



Minimizzazione di funzioni di più variabili



$\min(J\{\mathbf{w}\} | \dots)$ funzione costo od errore

Gradiente:

$$\frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_1} \frac{w_1}{|w_1|} + \frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_2} \frac{w_2}{|w_2|} +$$

$$\frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_3} \frac{w_3}{|w_3|} + \frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_4} \frac{w_4}{|w_4|} + \dots$$

Modifico il valore dei pesi di una quantità proporzionale alla pendenza della funzione costo rispetto a quel parametro.
Estensione della tecnica del gradiente a più variabili.

Serve un' **approssimazione iniziale** per i pesi $W_{ini} = \{w_j\}_{ini}$.

A.A. 2018-2019

17/45



Minimizzazione tramite gradiente nel bundle adjustment



$$(x - F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}))$$

È la mia funzione da ottimizzare. Ne faccio lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine:

$$x - = F(\cdot | W) + \sum_{j=1}^W \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial w_j} \right|_t * dw_j + \dots$$

= 0

Da qui ricavo un sistema lineare da cui ricavo i dw_j

A.A. 2018-2019

18/45



Esempio di applicazione tecnica del gradiente per funzioni di 1 variabile



Supponiamo che il modello da noi considerato sia semplice: $y = ax^2$

Consideriamo di avere stimato $a = 2$ e di avere misurato $y = 3$ per $x = 1$. Possiamo modificare il parametro a in modo tale che il modello fitta i dati ($x=1$ e $y=3$).

Linearizziamo il modello e scriviamo: $(y - ax^2) -$

$$\left[\frac{d}{da}(ax^2) \right] da$$

Sostituendo i valori otteniamo:

$$a = 2 + 1/4 = 2.25 \qquad da = (3 - 2 \cdot 1) / (2 \cdot 2 \cdot 1) = 1/4$$

$$a = 2.25 + 0.166 = 2.415 \qquad da = (3 - 2.25 \cdot 1) / 4.5 = 1/6$$

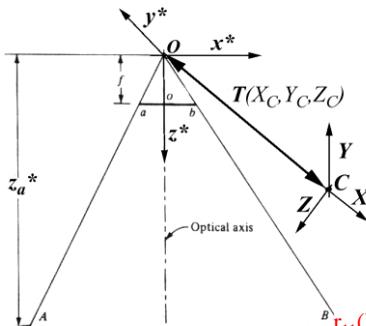
$$a = 2.415 + 0.11 = 2.52 \qquad da = -(3 - 2.42 \cdot 1) / 4.84 = 0.11$$

$$a = 2.52 \qquad da = -(3 - 2.52 \cdot 1) / 5.04 = 0.1 \dots$$

Avendo più di una misurazione dobbiamo “mediare” tra gli incrementi dx calcolati per ogni misurazione.



Equazioni di collinearità



$$\begin{aligned} x_m &= F(P(X, Y, Z) | \{w\}) \\ y_m &= G(P(X, Y, Z) | \{w\}) \end{aligned}$$

$$x_m - x_o = x_A f / z_A = f \quad \text{-----} \quad r_{11}(X_A - X_O) + r_{12}(Y_A - Y_O) + r_{13}(Z_A - Z_O)$$

$$r_{31}(X_A - X_O) + r_{32}(Y_A - Y_O) + r_{33}(Z_A - Z_O)$$

$$r_{21}(X_A - X_O) + r_{22}(Y_A - Y_O) + r_{23}(Z_A - Z_O)$$

$$y_m - y_o = y_A f / z_A = f \quad \text{-----} \quad r_{31}(X_A - X_O) + r_{32}(Y_A - Y_O) + r_{33}(Z_A - Z_O)$$



Minimizzazione dei residui (problema di minimo non lineare)



$$\min(x - F(P(X,Y,Z)|\{w\}))^2 + (y - G(P(X,Y,Z)|\{w\}))^2 = \min(F^* + G^*)$$

F^* , G^* sono i residui delle equazioni di collinearità

Il minimo della funzione $F^*|G^*$ sarà $\neq 0$ (errore di modellazione + errore di misura).

Linearizzazione (sviluppo di Taylor del primo ordine)

$$F^*(t+1) = F^*(t) + \sum_{j=1}^W \left. \frac{\partial F^*(.)}{\partial w_j} \right|_t * dw_j$$

$$G^*(t+1) = G^*(t) + \sum_{j=1}^W \left. \frac{\partial G^*(.)}{\partial w_j} \right|_t * dw_j$$

A.A. 2018-2019

21/45



Risoluzione della Calibrazione



Equazioni non-
lineari. $x = F(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})$
 $y = G(X,Y,Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})$

Definisco $W = [X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}]$

STRATEGIA DI SOLUZIONE: stima ai minimi quadrati iterativa.

Parti da un valore iniziale dei parametri.

Ripeti:

A) Determinazione dell'errore di retro-proiezione con il set di parametri corrente.

B) Linearizza le equazioni di collinearità per il punto P_k ed i parametri $\{W^t\}$.

C) Determina un valore incrementale delle incognite che migliora la soluzione, cioè diminuisce l'errore di retro-proiezione ($W^{t+1} = W^t + dW^t$)

Fino a quando l'incremento dei parametri non diventa trascurabile. $dW^t \cong 0$

 **A) Determinazione dell'errore di retro-proiezione (residuo)** 

Per ogni punto, $[p_k(x_k, y_k) P_k(X_k, Y_k, Z_k)]$,
 Dato un certo insieme di parametri:

$$W^t = [X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, y_o^t, \{ap_x^t\}, \{ap_y^t\}]$$

$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}))$$

$$(y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}))$$

Definisco residuo o errore di retro-proiezione la quantità $[v_{xk}, v_{yk}]$:

$$v_{xk} = F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) - x_k$$

$$v_{yk} = G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}) - y_k$$

NB Il residuo contiene sia l'errore di modellazione che l'errore di misura. Se i parametri sono quelli "reali", il residuo sarà uguale solo all'errore di misura.

A.A. 2018-2019 23/45

 **B) Linearizzazione della funzione da minimizzare (errore di retro-proiezione, o residui)** 

Per ogni punto, $[p_k(x_k, y_k) P_k(X_k, Y_k, Z_k)]$,
 Dato un certo insieme di parametri:

$$W^t = [X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, y_o^t, \{ap_x^t\}, \{ap_y^t\}]$$

$$F^* = (x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}))^2 +$$

$$G^* = (y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}))^2$$

$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\})) +$$

$$\left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial \omega} \right|_{W^t | P_k | P_k} d\omega + \dots$$

$$(y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\})) +$$

$$\left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial \omega} \right|_{W^t | P_k | P_k} d\omega + \dots$$

A.A. 2018-2019 24/45



B) Sviluppo in serie di Taylor (forma matriciale)



$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\})) + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dX_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dY_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dZ_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} d\omega + \dots$$

$$(y_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\})) + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dX_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dY_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dZ_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} d\omega + \dots$$

A x = b M punti e N parametri di calibrazione.

A (2*m x n) - Matrice di disegno (contiene le derivate **parziali**).

x (n) – Vettore delle incognite (gli incrementi dei parametri di calibrazione).

b (2*m) – Residuo o errore di retro-proiezione.

A.A. 2018-2019

25/45



Determina l'incremento dei parametri



$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\})) + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dX_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dY_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dZ_o + \left. \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} d\omega + \dots$$

$$(y_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\})) + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial X_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dX_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Y_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dY_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Z_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} dZ_o + \left. \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \right|_{w^{(1)}|p_k} d\omega + \dots$$

A x = b Stima ai minimi quadrati.

$$A^* A x = A^* b \quad \rightarrow \quad x = (A^* A)^{-1} A^* b$$

A.A. 2018-2019

26/45



Condizionamento della matrice $C = A^*A$



c_{ij} – contiene la somma dei prodotti delle derivate della funzione proiettiva rispetto al parametro i e j calcolate per tutti i punti.

Per evitare di ottenere elementi troppo grandi che rendono la norma della matrice C vicina alla precisione della macchina, si preferisce utilizzare la Singular Value Decomposition per risolvere il sistema lineare.

$$A x = b \rightarrow [U W V]x = b \rightarrow U^*U W Vx = U^*b \rightarrow Vx = W^{-1}U^*b$$

Matrice ortonormale
 $2^*m \times n$

Matrice diagonale
 $n \times n$

Matrice ortonormale
 $n \times n$

$x = V^*W^{-1}U^*b$

- La matrice C non viene formata.
- W^{-1} contiene i reciproci degli elementi di W .

A.A. 2018-2019
27/45



Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti



$$x = (A^*A)^{-1}A^*b$$

$x = V^*W^{-1}U^*b$

Se A è rank-deficient, A^*A è singolare.

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice W .

In questo caso il problema è sovraparametrizzato.

A.A. 2018-2019
28/45



Valutazione della bontà della stima



$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definisco residuo o errore di retro-proiezione la quantità $[v_{xk}, v_{yk}]$:

$$v_{xk} = F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) - x_k$$

$$v_{yk} = G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}) - y_k$$

Errore di misura Gaussiano a media nulla $e(0, \sigma^2)$

$$\langle v_{xk} \rangle = \langle v_{yk} \rangle = 0$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \sum_{m=1}^M (v_{x_m}^2 + v_{y_m}^2)$$

Errore di retro-proiezione = rumore di misura.



Valutazione della bontà della stima del singolo parametro e della loro correlazione



$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad \hat{\sigma}_0^2 = \sum_{m=1}^M (v_{x_m}^2 + v_{y_m}^2)$$

$$x = C^{-1} A^T b \quad C^{-1} \text{ è chiamata anche matrice di covarianza.}$$

Chiamiamo u e v le variabili casuali associate all'errore sui **parametri** e all'errore di **retro-proiezione**, rispettivamente. Si suppone errore a media nulla e Gaussianamente distribuito.

$$x + u = C^{-1} A^T (b + v)$$



$$u = C^{-1} A^T v$$



Impostazione del calcolo della correlazione tra i parametri



$u = C^{-1}A'v$

Vogliamo individuare la correlazione tra due parametri r ed s . Devo quindi determinare il valore atteso di $u_r * u_s$.

$$\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_W \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_W \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_Wu_1 & u_Wu_2 & \dots & u_W^2 \end{bmatrix}$$

$u = C^{-1}A'v \quad \Rightarrow \quad u' = v'A(C^{-1})'$

$uu' = C^{-1}A'vv'A(C^{-1})' \Rightarrow$ Applicando l'operatore di media, si ottiene:

$$\langle uu' \rangle = C^{-1}A' \langle vv' \rangle A(C^{-1})'$$

Dato che v sono i residui, e sono indipendenti, e tutte i punti di controllo hanno lo stesso tipo di errore di misura, si avrà che $\langle vv' \rangle = I\sigma_0^2$.

A.A. 2018-2019
31/45



Calcolo della correlazione tra i parametri



$$\langle uu' \rangle = C^{-1}A'IA(C^{-1})'\sigma_0^2 = C^{-1}\sigma_0^2$$

Da cui si giustifica il nome di matrice di covarianza per C^{-1} .

Segue che: $\sigma^2(u_{ij}) = c_{ij}^{-1}\sigma_0^2$ Varianza sulla stima del parametro.

Esempi di correlazione elevata:
 $f \leftrightarrow Z, Z_0$ $x_0, y_0 \leftrightarrow X, Y, X_0, Y_0$

$$-1 \leq r_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\sqrt{\langle u_i \rangle^2 \langle u_j \rangle^2}} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_i c_j}} \leq +1$$

Indice di correlazione tra il parametro i ed il parametro j
 (empiricamente si scartano parametri quando la correlazione è superiore al 95%)

Vanno rapportati alle dimensioni dei parametri coinvolti.

A.A. 2018-2019
32/45



Proprietà del bundle-adjustment



Con punti di controllo di coordinate note può essere utilizzato per calibrare una fotocamera.

Nella calibrazione di più fotocamere che guardano lo stesso pattern di calibrazione, si possono inserire anche punti di coordinate non note (deve valere la relazione:

$$2*(M+ K)*N \geq 3*K + N * (9 + AP)$$

N – numero di video-camere.

M – numero di punti di controllo di coordinate note.

K – numero di punti di controllo di coordinate non-note.

AP – parametri addizionali.

Esempio: 3 video camere, 4 parametri addizionali. $\rightarrow 2M + K \geq 13$.

Diverse combinazioni di punti di controllo (posizione nota e non nota).



Attenzioni nella calibrazione



- At least over two planes (to minimize the impact of the correlation between Z_o and c).
- Good coverage of the working volume (extrapolation fails): good distribution of the control points over each image, and of the images inside the working volume.
- Extract good features from the images (weighting of the observations may apply).
- Analysis of the geometrical model parameterization (weak-perspective or paraperspective instead of perspective projection).
- Analysis of the adequacy of the distortion model parameterization (number of distortion parameters).



Sommarrio



- Algoritmi di calibrazione
- Ricostruzione 3D

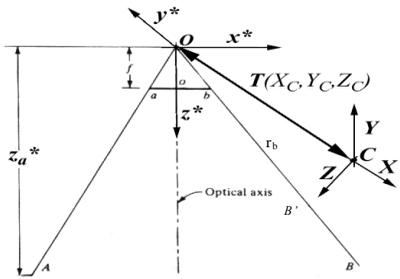
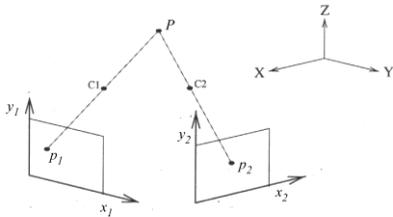
A.A. 2018-2019

35/45



Dal 2D al 3D



Nello spazio 3D esistono ∞^1 punti compatibili con p_b
 Sono tutti i punti sulla retta per p_b e O
 sono infiniti i punti

Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Soluzione: Stereoscopia

A.A. 2018-2019

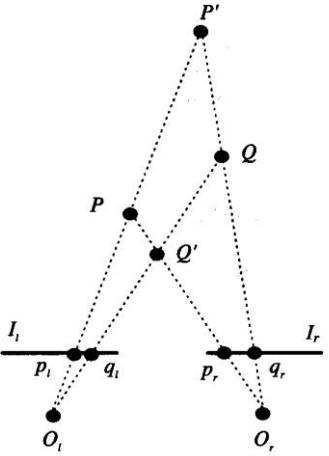
36/45



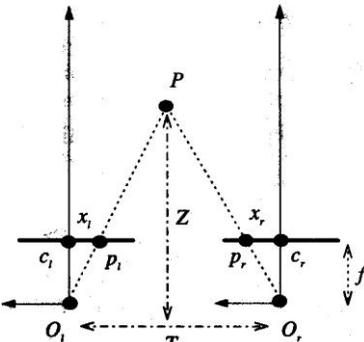
3D basato su stereo-disparità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



(a)



(b)

$Z / T = f / d$

A.A. 2018-2019

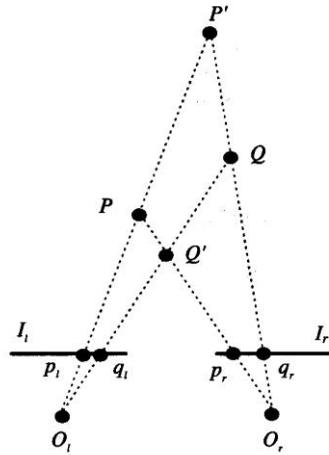
37/45



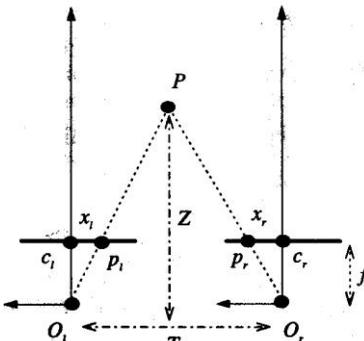
Risoluzione nella profondità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



(a)



(b)

$Z / T = f / d$

$d = f T / Z$

$\Delta d = -f T / Z^2 \Delta Z$

A.A. 2018-2019

38/45



Problemi

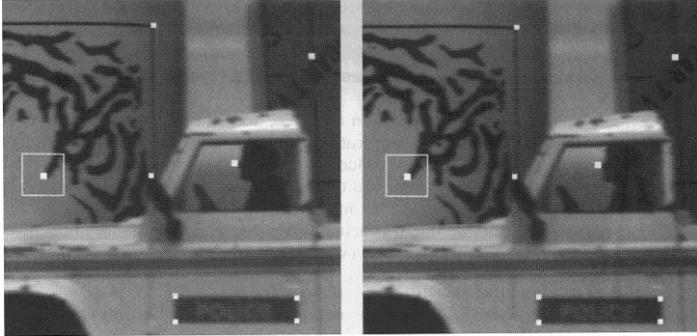


- Corrispondenza.
- Ricostruzione posizione 3D.

Low-level processing

- Classificazione.

High-level processing



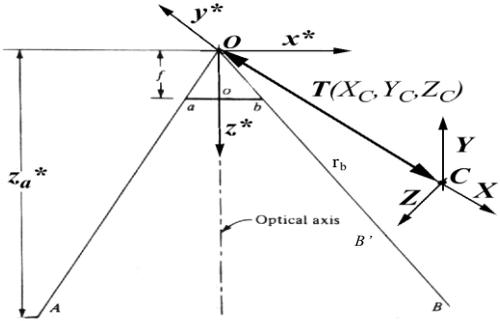
A.A. 2018-2019

39/45



Dal 2D al 3D





Invertiamo le Equazioni di collinearità

$$P(X, Y, Z) \Rightarrow p(x, y, f)$$

---->

$$p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$$

$$x_a = x_o + f * \frac{m_{11}(X - X_c) + m_{12}(Y - Y_c) + m_{13}(Z - Z_c)}{m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)}$$

$$y_a = y_o + f * \frac{m_{21}(X - X_c) + m_{22}(Y - Y_c) + m_{23}(Z - Z_c)}{m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)}$$

$$z_a = f$$

A.A. 2018-2019

40/45



Dal 2D al 3D



- Equazioni inverse $p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$

$$[m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)] * (x_a - x_0) = f[m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)]$$

$$[m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)] * (y_a - y_0) = f[m_{21}(X - X_C) + m_{22}(Y - Y_C) + m_{23}(Z - Z_C)]$$

Sono equazioni lineari in **X, Y, Z**:

- $[m_{31}(x_a - x_0) - fm_{11}] X + [m_{32}(x_a - x_0) - fm_{12}] Y + [m_{33}(x_a - x_0) - fm_{13}] Z = [m_{31}(x_a - x_0) - fm_{11}] X_C + [m_{32}(x_a - x_0) - fm_{12}] Y_C + [m_{33}(x_a - x_0) - fm_{13}] Z_C$
- $[m_{31}(y_a - y_0) - fm_{21}] X + [m_{32}(y_a - y_0) - fm_{22}] Y + [m_{33}(y_a - y_0) - fm_{23}] Z = [m_{31}(y_a - y_0) - fm_{21}] X_C + [m_{32}(y_a - y_0) - fm_{22}] Y_C + [m_{33}(y_a - y_0) - fm_{23}] Z_C$

Identificano due piani:

- $a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = d_1$ // asse y
- $a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = d_2$ // asse x

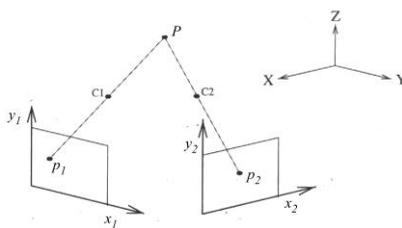
Intersezione di due piani individua una retta nello spazio 3D (raggio della video-camera, camera ray). Retta per il punto sul piano immagine ed il centro di prospettiva.

A.A. 2018-2019

41/45



Ricostruzione stereoscopica



$$\{p_1(x, y) \iff p_2(x, y)\}$$

$$[p_1(xy) \mid p_2(xy)] \Rightarrow P(XYZ).$$

Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Equazioni di collinearità per due video-camere:

- $a_{1TV1} X + b_{1TV1} Y + c_{1TV1} Z = d_{1TV1}$
- $a_{2TV1} X + b_{2TV1} Y + c_{2TV1} Z = d_{2TV1}$
- $a_{1TV2} X + b_{1TV2} Y + c_{1TV2} Z = d_{1TV2}$
- $a_{2TV2} X + b_{2TV2} Y + c_{2TV2} Z = d_{2TV2}$

A.A. 2018-2019

42/45



Ricostruzione - matrici



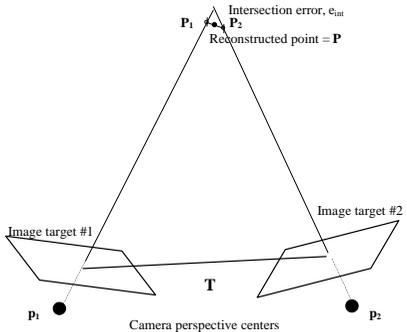
$$A = \begin{bmatrix} a_{1TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{2TV1} & a_{1TV1} & a_{1TV1} \\ a_{1TV2} & b_{1TV2} & c_{1TV2} \\ a_{2TV2} & b_{2TV2} & c_{2TV2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} d_{1TV1} \\ d_{2TV1} \\ d_{1TV2} \\ d_{2TV2} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

In forma matriciale: $A P = B$ \Rightarrow $P = (A^T A)^{-1} A^T B$

- Effetto dell'errore di misura.
- Quando non ammette soluzioni?



Intersection error, e_{int}
Reconstructed point = P

Image target #1 Image target #2

P₁ P₂
Camera perspective centers

A.A. 2018-2019
43/45



Ricostruzione - Ray intersection



- *Altra soluzione:* equazioni in forma parametriche delle due rette:

$$X_1 = Xc_1 + a_1 k$$

$$X_2 = Xc_2 + a_2 h$$

$$Y_1 = Yc_1 + b_1 k$$

$$Y_2 = Yc_2 + b_2 h$$

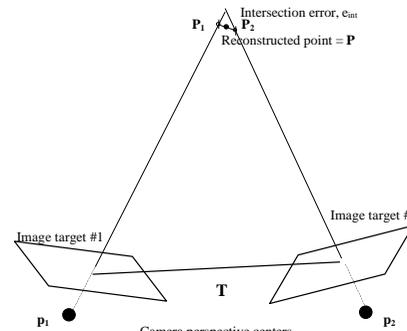
$$Z_1 = Zc_1 + c_1 k$$

$$Z_2 = Zc_2 + c_2 h$$

$$\min_{h,k} [(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2]$$

- Calcolo della distanza (funzione dei due parametri, h e k);
- Minimizzazione (funzione dei due parametri).

- Calcolo della distanza (funzione dei due parametri, h e k);
- Minimizzazione (funzione dei due parametri).



Intersection error, e_{int}
Reconstructed point = P

Image target #1 Image target #2

P₁ P₂
Camera perspective centers

A.A. 2018-2019
44/45



Sommario



- Algoritmi di calibrazione
- Ricostruzione 3D