



# Realtà Virtuale From 3D to 2D


Prof. Alberto Borghese  
Dipartimento di Informatica  
[alberto.borghese@unimi.it](mailto:alberto.borghese@unimi.it)

Università degli Studi di Milano




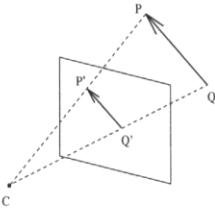
## Sommario

- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione

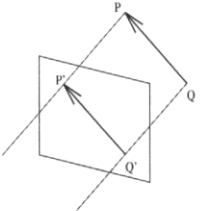


## Proiezione centrale verso proiezione ortogonale





**1)**



**2)**


$P(X,Y,Z)$  viene proiettato su un piano (piano immagine) nel punto  $P'(X',Y')$ .  $Z$  è la distanza dal piano immagine.

- 1)  $X'$  dipende da  $X$  e  $Z$ .
- 2)  $X'$  non dipende da  $Z$ , ma solo da  $X$ .


Proiezione centrale: centro di proiezione al finito.

Proiezione ortogonale: centro di proiezione all'infinito.

A.A. 2018-2019
3/41



## Dal 3D al 2D

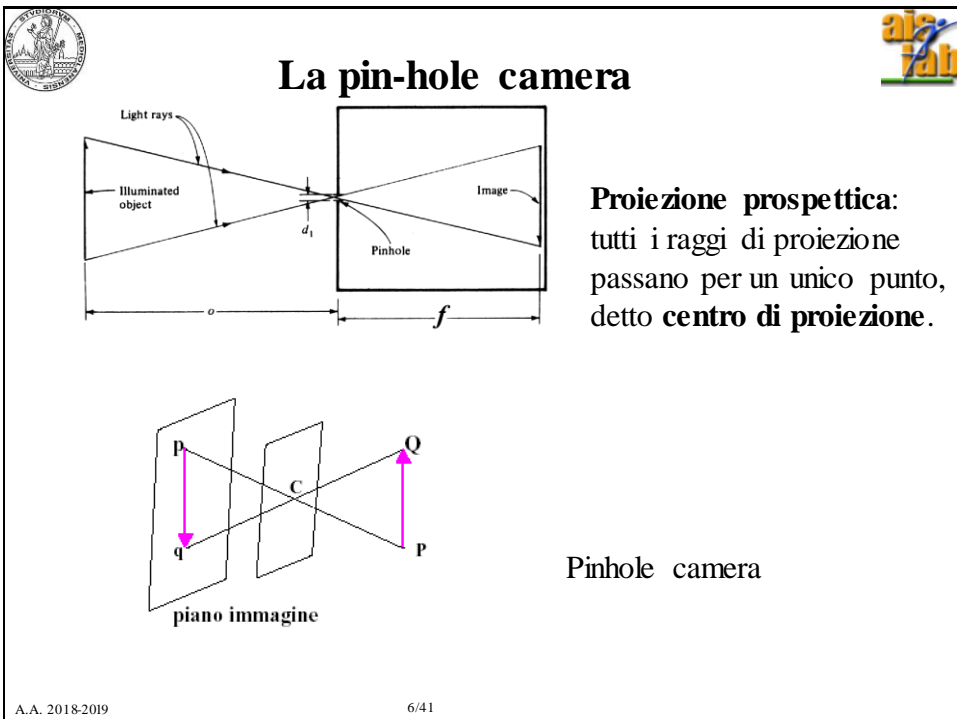
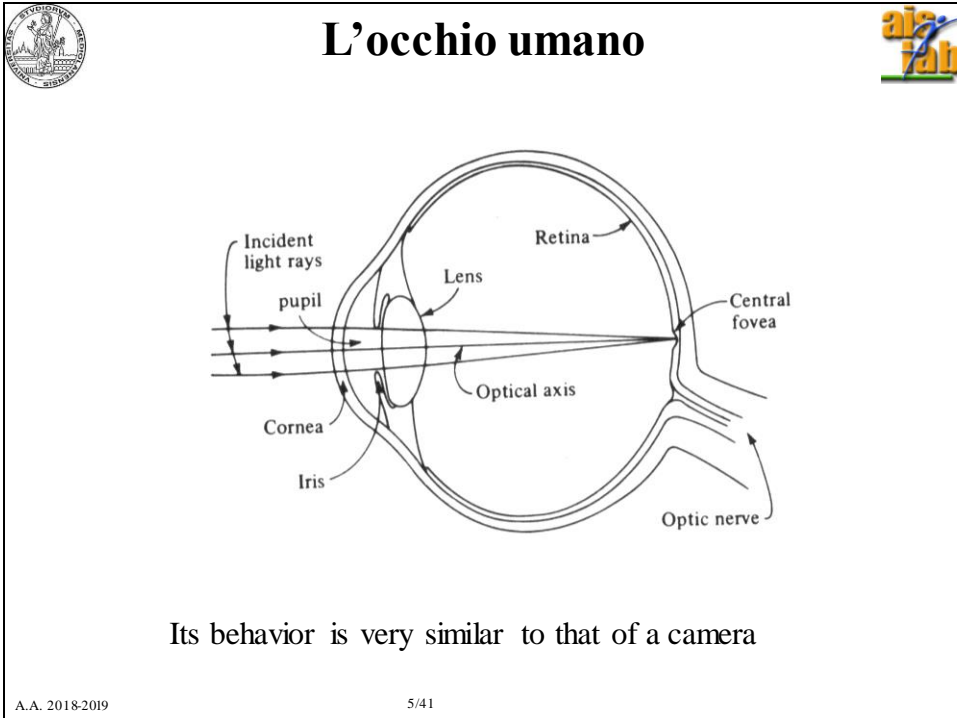



Come si forma un'immagine?

- Scena con oggetti riflettenti.
- Sorgente di illuminazione
- Piano di rilevazione della luce riflessa.


Il motore di questa trasformazione è la **proiezione prospettica**.

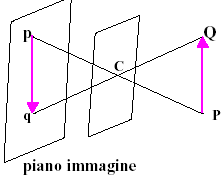
A.A. 2018-2019
4/41



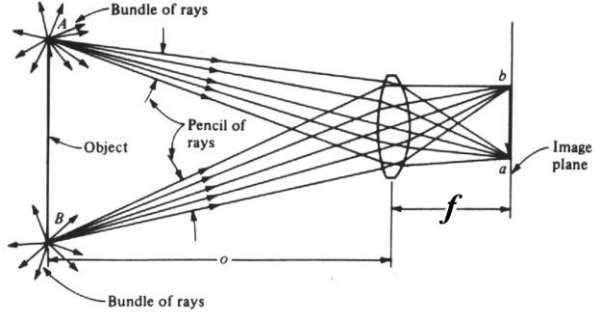


## La lente






Pinhole camera




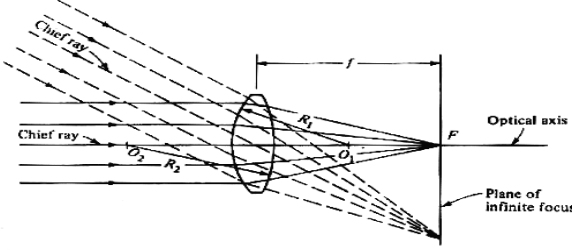
Lente convergente

A.A. 2018-2019
7/41



## Geometria dell'ottica





Oggetti all'infinito

- **Distanza focale:** distanza del piano immagine quando un oggetto si trova all'infinito.
- **Asse ottico:** raggio che non viene deviato dalla lente.
- **Intersezione dell'asse ottico con il piano immagine dà il punto principale (F).**

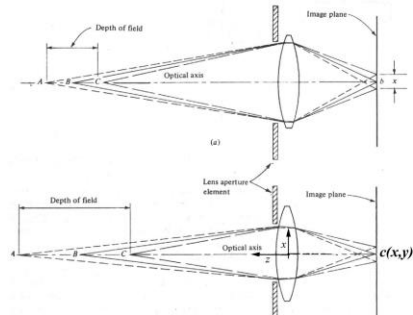
A.A. 2018-2019
8/41



## Messa a fuoco



Problema della messa a fuoco



**Parametri di camera (o intrinseci):**

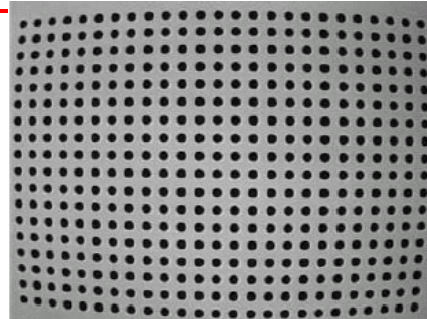
- Punto principale  $c(x,y)$  + lunghezza focale,  $f$  (3 parametri).
- Occorre conoscere anche il fattore di forma dei pixel nel caso di immagini digitali (è una costante, non un parametro).
- (Distorsioni).

A.A. 2018-2019

9/41



## Esempi di Distorsioni




Ottime per effetti speciali, un po' meno per delle misure.....


*Le camere non sono metriche.*

A.A. 2018-2019

10/41



## Distorsioni

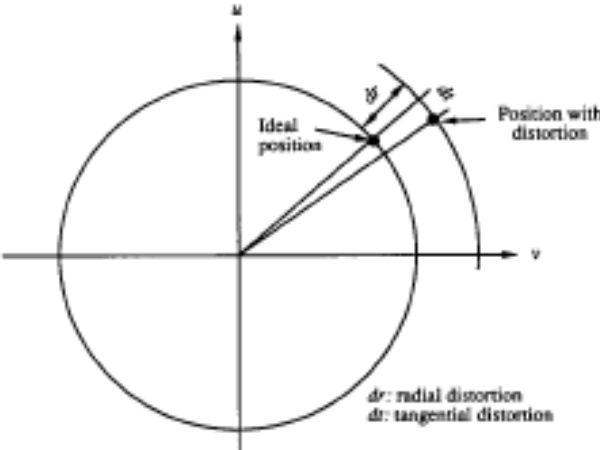


Distorsioni radiali.

Distorsioni tangenziali.


Shrinkage ( $x' = \lambda x, y' = y$ ).

$$x_m = x + f(x,y)$$


$$y_m = y + g(x,y)$$


$dr$ : radial distortion  
 $d\theta$ : tangential distortion

A.A. 2018-2019



## Distorsioni radiali



A cuscinetto

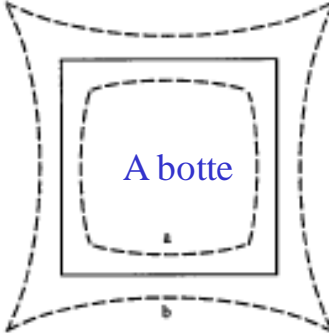
$$dr(p) = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + \dots$$

$$r = |p - p_0|$$

Rappresentazione polare:

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$



A botte

$$dx(p) = k_0 x + k_1 x(x^2 + y^2) + O[(x,y)^5]$$

$$dy(p) = k_0 y + k_1 y(x^2 + y^2) + O[(x,y)^5]$$

Il parametro  $k_0$  non si considera perchè corrisponde ad una variazione di scala.

A.A. 2018-2019 12/41



## I modelli di distorsioni



Semplificazioni possibili delle equazioni che modellano i parametri di distorsione

1	Radial Polynomial 3rd Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y$	(1)
2	Radial Polynomial 5th Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 r^4 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_2 r^4 y$	(2)
3	Radial and Tangential	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 (r^2 + 2x^2) + k_3 2xy$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_3 (r^2 + 2y^2) + k_2 2xy$	(3)

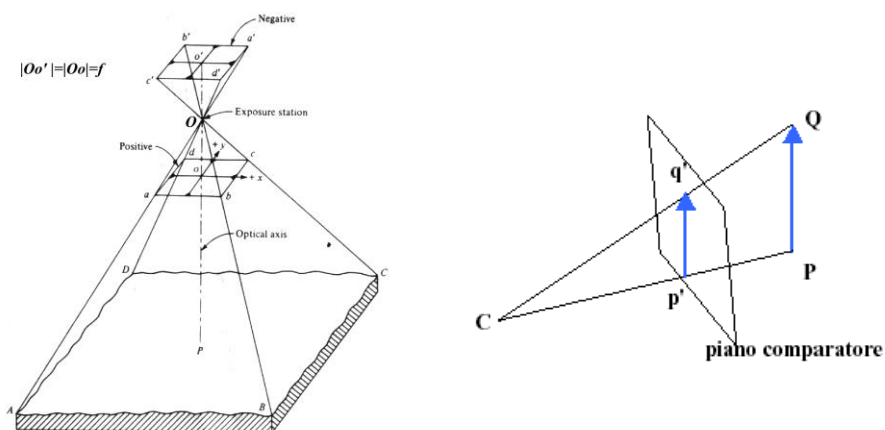
In alternativa: modelli semi-parametrici che fittano il campo di distorsione a partire da misure prese sul campo.

A.A. 2018-2019

13/41




## Raddrizzamento dell'immagine




Si considera un piano posto davanti al centro di proiezione (si ottiene scendendo l'immagine dall'angolo dx in basso).

A.A. 2018-2019

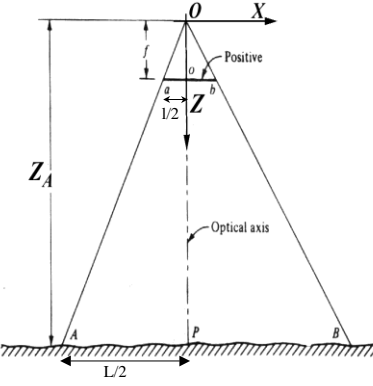
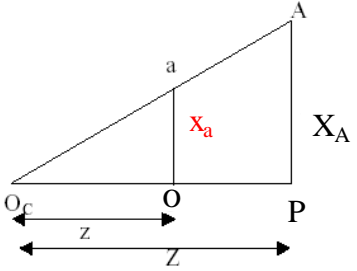
14/41



## Raddrizzamento dell'immagine




Tutte le coordinate misurate rispetto a un centro comune


Per similitudine fra i triangoli aOb e AOB:  
 $Oo : OP = ao : AP$

$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = X_A f / Z_A \\ y_a = Y_A f / Z_A \end{cases}$$

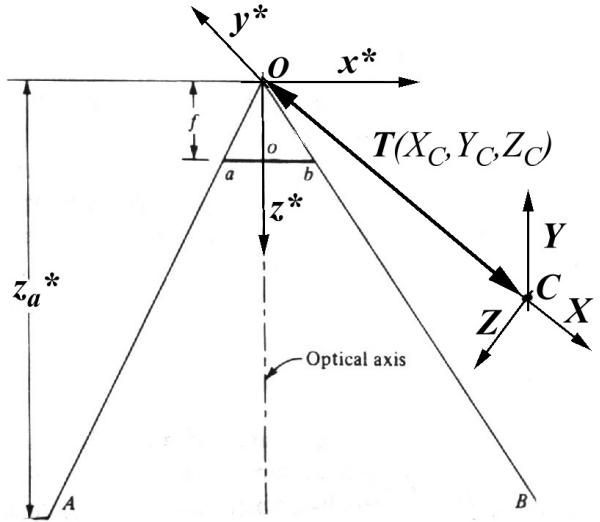
A.A. 2018-2019 15/41



## I parametri esterni



- **Traslazione:**  
3 componenti:  
 $T(X_C, Y_C, Z_C)$
- **Rotazione**  
 $R_{3 \times 3}(\omega, \phi, k)$



A.A. 2018-2019 16/41

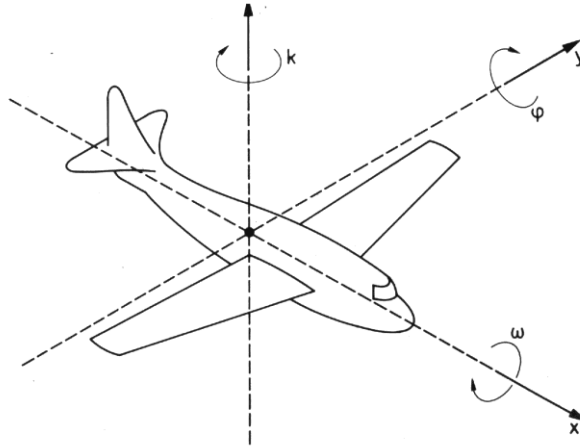




## Angoli di orientamento nello spazio 3D



Modo generale: roll, pitch, e yaw. Sono 3 rotazioni sequenziali,  
 $(\omega, \phi, \kappa)$ : rollio, beccheggio e deriva. non commutative.

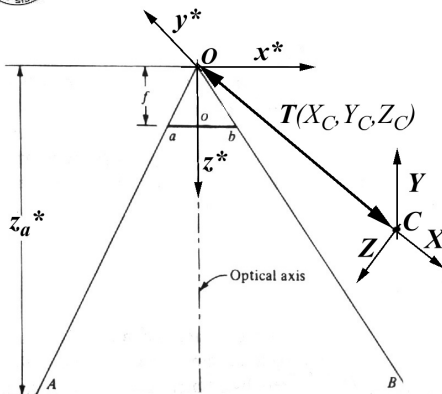


A.A. 2018-2019

17/41



## Dal 3D al 2D



$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = X_A^* f / Z_A^* \\ y_a = Y_A^* f / Z_A^* \end{cases}$$

$$P_A^* = R (P_A - T)$$

$$P(X_A, Y_A, Z_A) \Rightarrow P_A^*(X_A^*, Y_A^*, Z_A^*) \Rightarrow a(x_a, y_a)$$

La terza coordinate sul piano immagine,  $z_a = f$

A.A. 2018-2019

18/41



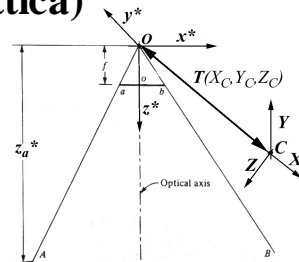
## Equazioni di collinearità (rappresentazione prospettica)



$$X^*_A = r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)$$

$$Y^*_A = r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)$$

$$Z^*_A = r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)$$



$$(x_a - x_o)/f = X^*_A / Z^*_A = \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

$$y_a - y_o = y^*_A f / z^*_A = \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

**Complessivamente 9 parametri. Equazioni non-lineari.**

A.A. 2018-2019

19/41

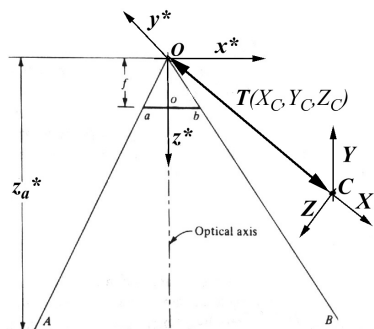
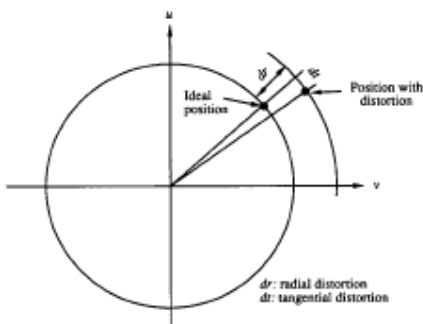



## Modello reale della ripresa fotografica




$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$





## Tassonomia dei parametri



$P^3 \rightarrow P^2$  Interior parameters

$P^3 \rightarrow P^3$  Exterior parameters

$P^2 \rightarrow P^2$  Distortion parameters:  $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$   
( $f(x, y, x_0, y_0)$ ;  $g(x, y, x_0, y_0)$ )

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

Focal length,  $f$


Principal point  $(x_0, y_0)$

Orientation  $(\omega, \phi, \kappa)$


Position  $(X_0, Y_0, Z_0)$

A.A. 2018-2019

21/41



## Sviluppo della matrice di proiezione



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazione  
mediante scala e  
traslazione

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Roto-traslazione

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$p = KMA \quad P = HP$

Che forma ha H?

A.A. 2018-2019

22/41



## Proiezione in coordinate omogenee



$$P' = AP$$

$$\begin{bmatrix} x_{omogenee} \\ y_{omogenee} \\ w_{omogenee} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_c \\ 0 & f & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fX' + x_c Z' \\ fY' + y_c Z' \\ Z' \end{bmatrix}$$

Dividendo per la terza coordianta,  $w_{omogenee}$ .

$$x_{cartesiana} = f \frac{X'}{Z'} + x_c$$

$$y_{cartesiana} = f \frac{Y'}{Z'} + y_c$$



## Sommario



- La trasformazione proiettiva
- **Calibrazione**



## Set-up



Passive vision systems do not constraint cameras position.

Cameras have to be positioned to get the best volume coverage (every feature should be surveyed by at least two cameras) and to **view the volume of interest!**

### *Set-up requires:*

- Cameras position
- Focusing (and possibly choice of a proper lens)
- Lens opening

Not all the cameras should view the same volume region.

**Optimal set-up may require some time  
and/or  
Multiple cameras are used.**



## Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione




### 3 attori:


- A) I punti nello spazio 3D:  $\{X, Y, Z\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine  $\{x, y\}$
- C) I parametri  $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$


### 3 problemi:

- A) + B)  $\rightarrow$  C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C)  $\rightarrow$  A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C)  $\rightarrow$  B) Proiezione (augmented reality).




## Augmented reality at work






A.A. 2018-2019

27/41



## Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

**3 attori:**

- A) I punti nello spazio 3D:  $\{X, Y, Z\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine  $\{x, y\}$
- C) I parametri  $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

A.A. 2018-2019

28/41



## In che cosa consiste la calibrazione



Determinazione dei parametri o di un loro sottoinsieme.

Determinazione dei parametri della trasformazione prospettica:

- **Parametri esterni:**  $X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k)$ .
- Parametri interni:  $x_0, y_0, f$ .
- Parametri di distorsione (o parametri aggiuntivi):  $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1,$   
.....

Calibrazione dei parametri esterni può essere fatta separatamente dai parametri interni e/o di distorsione.



## Perchè calibrare?



- Per ottenere misure e ricostruzione precise degli oggetti.
- Per ricavare i parametri corretti della camera (focale, punto principale).
- Per rimuovere gli effetti della **distorsione** delle lenti (errori sistematici).
- Molto praticata in fotogrammetria / ridotta al minimo in computer vision.



## Calibrations



2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).

3D calibration (estimate of the exterior parameters).

Metodi:

- Scacchiere (Zhang et al., Software in Matlab e OpenCV)
- Barra rigida con 2 marker (Borghese e Cerveri, 2000; utilizzata nei sistemi di Mocap; e.g. nello SMART-3D).
- Griglie 3D (non più utilizzato, Borghese et al., 1990)

Metodi ibridi:

- **Structure from Motion (SfM)**, **SLAM** (Simultaneous Localization and Mapping), vengono ricostruite le coordinate 3D dei punti, stimati i parametri interni e determinato il movimento.

Algoritmi:

- DLT (Direct Linear Transform -> da 9 parametri, si passa a 12 in un sistema lineare).



## Camera Calibration (determinazione dei parametri interni)



On the bench – surveying a regular grid of fiducial points (→ camere metriche).

Off the bench (on the field) – distortion parameters are estimated with the geometrical parameters of the set-up (external parameters).







## Calibrazione con punti in posizione nota



- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.  
Ho  $9 + D$  parametri aggiuntivi.

Ho bisogno di  $(9 + D) / 2$  punti di controllo.

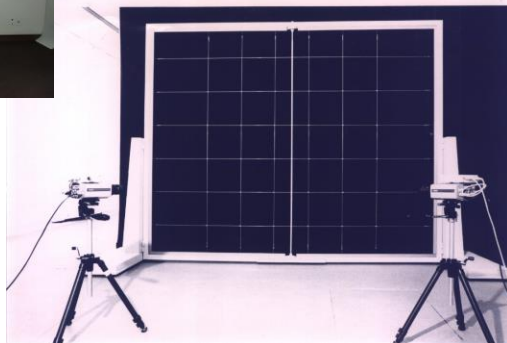
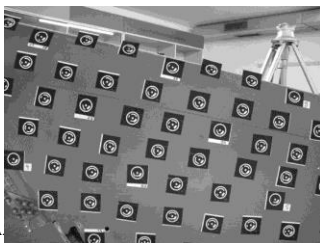
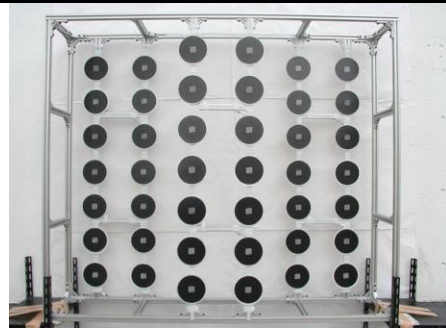
A.A. 2018-2019

33/41




### Test field (Known control points)

*3D structures, which carry the control points are required. They should cover the working volume.*




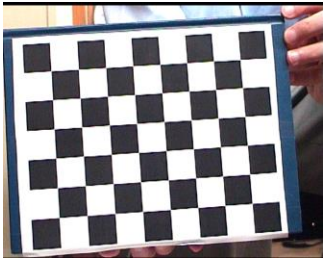
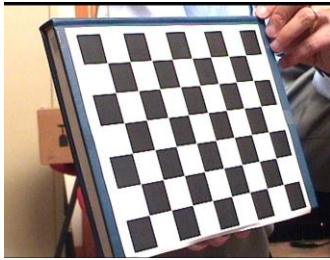
A.A.

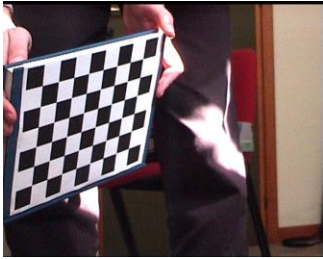
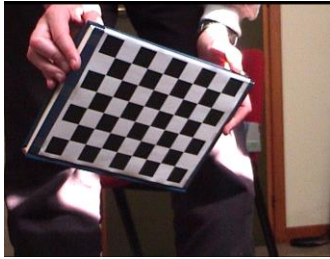
34/41



## Calibration through a chessboard



Estimated Parameters.


Distortions  
Internal  
External

<http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/>


Also suite in Matlab

A.A. 2018-2019

35/41


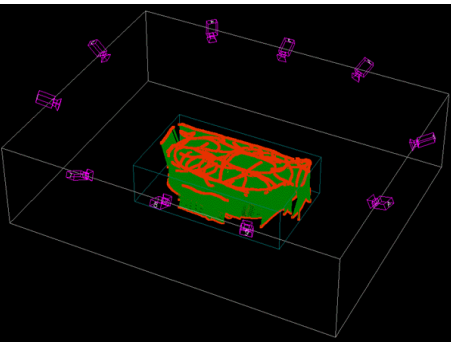


## Wand Calibration



2 steps:



- Establish external reference system (and initialize estimate)
- “Refinement”: estimate of the parameters.

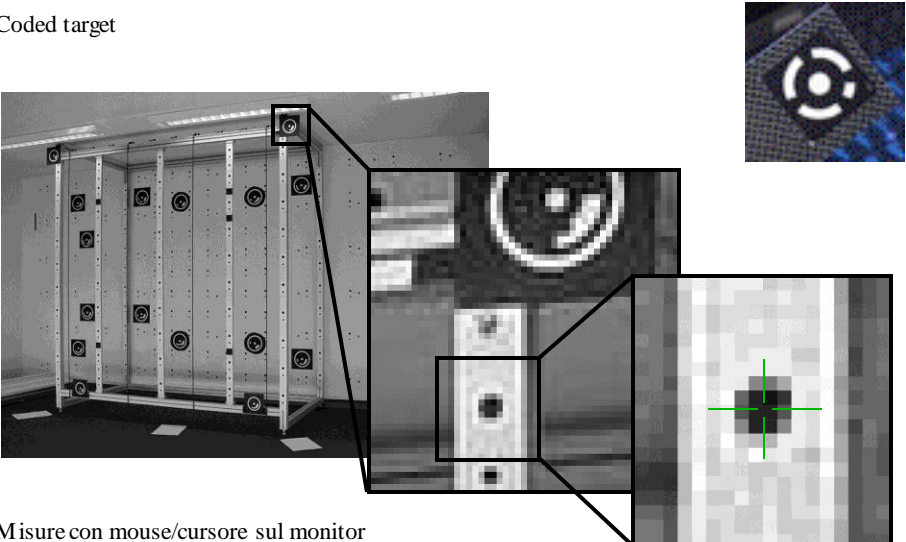
Wand itself can give a preferential reference system (and it can be used to recover the scale factor, video).

A.A. 2018-2019

36/41



 **Misurazione manuale dei punti di controllo** 

Coded target

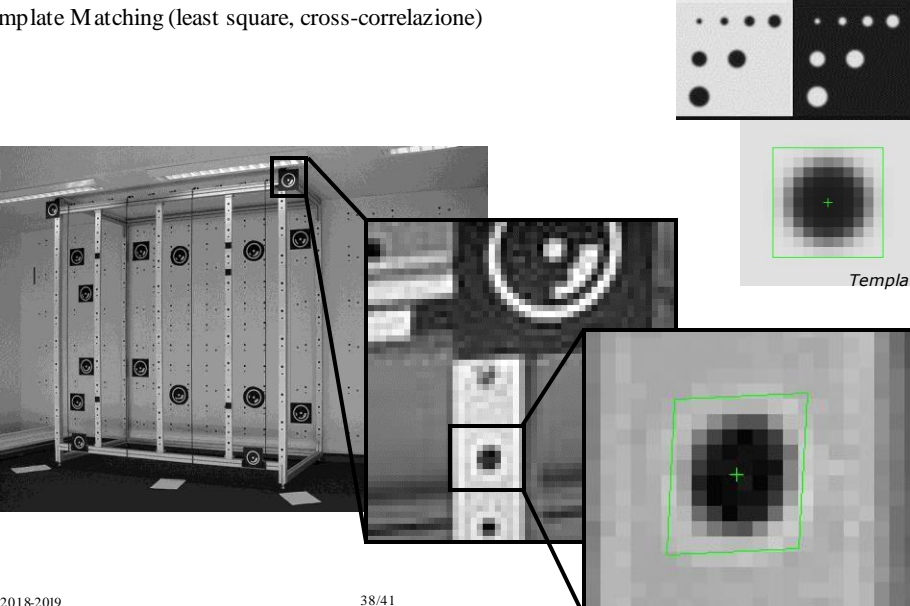


Misure con mouse/cursore sul monitor  
Precisione: 1/4 - 1/8 Pixel


A.A. 2018-2019 37/41

 **Misurazione automatica dei control points** 


Template Matching (least square, cross-correlazione)



A.A. 2018-2019 38/41



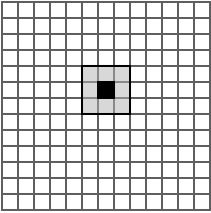
## Cross-correlazione



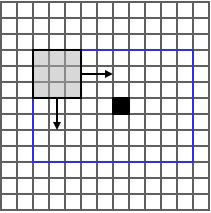
Calcolo il coefficiente di correlazione piu' alto all'interno di una finestra di ricerca

$$\gamma(x, y) = \frac{\sigma_{LR}}{\sigma_L \sigma_R}$$


$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)^2}{mn-1}} \quad \sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R)^2}{mn-1}} \quad \sigma_{LR} = \frac{\sum_i \sum_j ((g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)(g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R))}{nm-1}$$




finestra di correlazione



finestra di ricerca


 Conjugate pixels




Search window

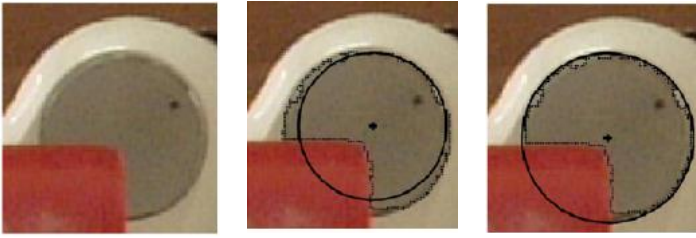
A.A. 2018-2019

39/41



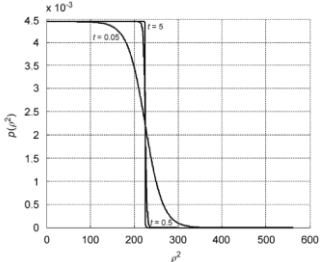
## Approccio statistico al circle fitting





*Frosio, Borghese – Pattern Recognition - 2008*

$$L(\mathbf{p}_C, R_C) = \prod_{i=1}^N p(\rho_i^2, R_C).$$



A.A. 2018-2019

40/41



## Sommario



- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione