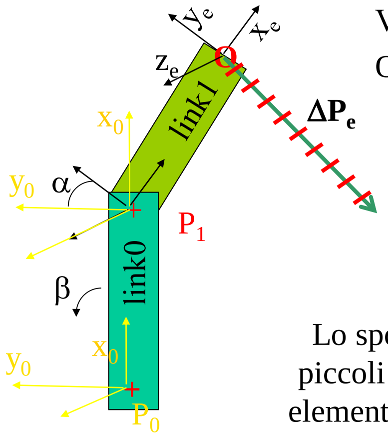
Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso di end-point

Prof. Alberto Borghese

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Sistema di equazioni lineari

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

Chiamiamo **$W_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$** il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{yk})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{yk})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{yk})$$

Come vengono trattate le velocità

Quando la matrice del Jacobiano è quadrata, risolvo la cinematica inversa mediante inversione della matrice Jacobiano

$$\mathbf{V = J}\dot{\theta} \longrightarrow \mathbf{J^{-1}V} = \dot{\theta}$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

Elemento chiave è il Jacobiano, **J**.

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale $\forall$valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Sistema M x N, M > N

$a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\quad a_{1N}\, x_N = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\quad a_{2N}\, x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\, x_2 + \ldots\ldots\quad a_{MN}\, x_N = b_M$

Esempio:

$3x_1 + 2\, x_2 + \ldots\ldots\quad 4x_N = 5$

$4x_1 - 2\, x_2 + \ldots\ldots\quad 0.5\, x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\, x_2 + \ldots\ldots\quad -3\, x_N = -1$

Ammette 1, nessuna o ∞ soluzioni

A x = b

A è M x N, M > N, non è una matrice quadrata.

1, nessuna, ∞ soluzioni.

Ho delle equazioni di troppo, devono essere correlate (combinate linearmente), perché il sistema ammetta soluzione.

Posso sempre calcolare la soluzione in forma matriciale.

Sistemi lineari con m > n

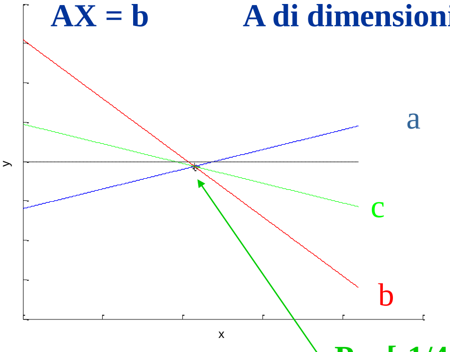
J(W,L) è rettangolare: numero di righe maggiore del numero di colonne

AX = b **A di dimensioni m x n**

$y = x + 2$

$y = -3x + 1$

$y = -x + 3/2$



P = [-1/4 7/4]

Una delle 3 righe di A è combinazione lineare delle altre.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ +1.5 \end{bmatrix}$$

Esiste un'equazione "di troppo"

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

Rango di A è pieno

Sistema lineare: soluzione algebrica

Caso generale:

$$A X = B \Rightarrow A' A X = A' B \Rightarrow (A' A)^{-1} A' A X = (A' A)^{-1} A' B \Rightarrow X = (A'A)^{-1} A'B$$

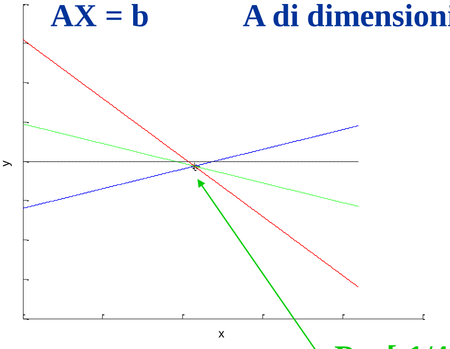
(A'A) gioca il ruolo di A quadrata.

Quale criterio viene soddisfatto da X?

Sistemi lineari con m > n

AX = b **A di dimensioni m x n**

y = x - 2
y = -3x + 1
y = -x + 3/2



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ +1.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{det} = 24$$

P = [-1/4 7/4]

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix} \qquad P = C * A^T * b$$

P = [-0.25 +1.75]

intersezione

Riformulazione del problema

$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\; a_{1N}\,x_N = b_1 + \nu_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\; a_{2N}\,x_N = b_2 + \nu_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\,x_2 + \ldots\ldots\; a_{MN}\,x_N = b_M + \nu_M$

Modello **Misure**

Errore di modello (sistematico, randomico). M x 1 => **Residuo.**

A x = b + N

M x 1

Vettore dei termini noti

M x N

(Matrice di disegno)

N x 1

Vettore delle incognite

Quale criterio viene soddisfatto da X?

Soluzione come problema di ottimizzazione

Funzione costo: $(Ax – b)^2 = \sum_k {\nu_k}^2 = \|Ax - b\|^2$

Assegno un costo al fatto che la soluzione x, non soddisfi tutte le equazioni, la somma dei residui associati ad ogni equazioni viene minimizzata. Geometricamente: viene trovato il punto a distanza minima da tutte le rette.

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_k {\nu_k}^2 = \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$$

$$\mathbf{A^T A x = A^T b}$$

$$\mathbf{X = (A^T A)^{-1} A^T b}$$

NB le funzioni costo sono spesso quadratiche (problemi di minimizzazione convessi) perchè il costo cresce sia che il modello sovrastimi che sottostimi le misure.

Sistemi lineari con m > n

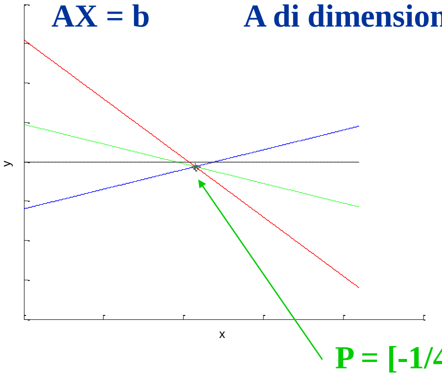
AX = b **A di dimensioni m x n**

y = x - 2

y = -3x + 1

y = -x + 3/2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ +1.5 \end{bmatrix}$$



P = [-1/4 7/4]

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$

$P = C * A^T * b$ **P = [-0.25 +1.75]**

intersezione

$\|Ax- b\| = 0$

Sistemi lineari con m > n – non esiste soluzione (matematica)

AX = b **A di dimensioni m x n**

y = x - 2

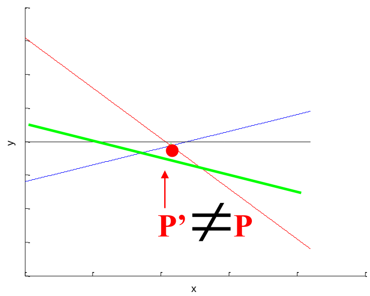
y = -3x + 1

y = -x + 1/2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ +0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix}$$



$$\sum_k {v_k}^2 = \|Ax - b\|^2 = 0.865$$

$P = C * A^T * b$ **P' = [-0.25 +1.4167]**

No intersezione

Commenti

$$\sum_k {v_k}^2 = \|Ax - b\|^2 = \sum_k \| A_{k,*}x - b_k \|^2 =$$

$$[(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) - b_1]^2 + [(A_{21}x_1 + A_{22}x_2) - b_2]^2 +$$

$$[(A_{31}x_1 + A_{32}x_2) - b_3]^2$$

Lo scarto misura la distanza dalla retta

Giustificazione statistica

- **<u>C'è un solo insieme vero</u> dei parametri**, mentre ci **possono essere infiniti universi di dati per effetto dell'errore di misura**.
- La domanda quindi più corretta sarebbe: "Dato un certo insieme di parametri, qual'è la probabilità che questo insieme di dati sia estratto?" (più correttamente si parla di densità di probabilità?)
- Cioè, **per ogni insieme di parametri, calcoliamo la probabilità che i dati siano estratti. Ovverosia la likelihood (verosimiglianza) dei parametri, dato un certo insieme di dati.**

La stima ai minimi quadrati dei parametri è equivalente a determinare i parametri che massimizzano la funzione di **verosimiglianza** sotto l'ipotesi di errore **Gaussiano a media nulla**.

Sommario

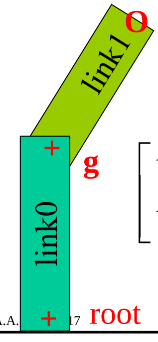
- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Il Jacobiano dell'esempio

$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_{e}P \\ {}^{ABS}_{g}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ l_o \cos\beta \\ -l_o \sin\beta \end{bmatrix}$$

Jacobiano rettangolare: 4 x 2

Definiamo la traiettoria dell'end effector **e** del joint **g**



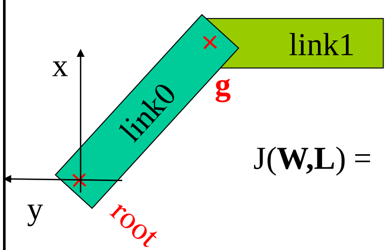
$$\begin{bmatrix} {}^{ABS}_{e}\Delta P \\ {}^{ABS}_{g}\Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \\ 0 & -l_o \sin\beta \\ 0 & l_o \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2)

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \\ 0 & -l_o \sin\beta \\ 0 & l_o \cos\beta \end{bmatrix}$$

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

$$b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix} \quad 4 \times 1 \qquad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix} \quad 2 \times 1$$



$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 \\ 0 & -l_0 \cos 45 \\ 0 & -l_o \sin 45 \\ 0 & l_o \cos 45 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_o l_1 \sqrt{2}/2 \\ l_1^2 + l_o l_1 \sqrt{2}/2 & (-l_1 - l_o \sin 45)^2 + (l_o \cos 45)^2 + (l_0 \sin 45)^2 + (l_0 \cos 45)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} \\ 4+2\sqrt{2} & 12+4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2)

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$ $\quad b = \begin{bmatrix} dP_e / dt \\ dP_f / dt \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} d\alpha / dt \\ d\beta / dt \end{bmatrix}$

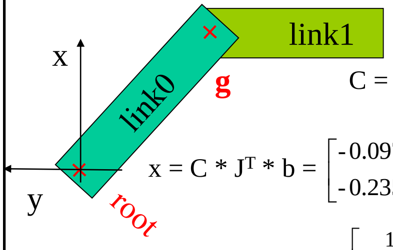
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$dP^e_x = 1$ $\quad dP^e_y = 0$

$dP^g_x = 1$ $\quad dP^g_y = 0$

$$(J^T * J) = \begin{bmatrix} 4 & 6.8284 \\ 6.8284 & 17.6568 \end{bmatrix}$$



$$C = (J^T * J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7357 & -0.2845 \\ -0.2845 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$x = C * J^T * b = \begin{bmatrix} -0.0976 \\ -0.2357 \end{bmatrix} \textit{radianti} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.593 \\ -13.506 \end{bmatrix} \textit{gradi}$$

$$J * x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dP_{e_x} \\ dP_{e_y} \\ dP_{g_x} \\ dP_{g_y} \end{bmatrix}$$

che è diverso
dal valore impostato
per ΔP

$$\min \| Jx - b \| = 0.3333^2 + 0.6666^2 + 0.3333^2$$

Sommario

- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n, sistemi sovradeterminati).
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.

Stima ai minimi quadrati pesata

min ‖ P(Ax –b) ‖ **PAX = Pb** **A di dimensioni m x n**

P di dimensioni m x m – matrice dei pesi, diagonale

$$p_1a_{11}x_1 + p_1a_{12}x_2 - p_1b_1 = p_1\nu_1$$
$$p_2a_{21}x_1 + p_2a_{22}x_2 - p_2b_2 = p_2\nu_2$$
$$p_3a_{31}x_1 + p_3a_{32}x_2 - p_3b_3 = p_3\nu_3$$

Residuo pesato

$$\min \sum_k (p_k \nu_k)^2$$

$$\mathbf{A^T PA\, X = A^T P\, b}$$

$$\boxed{\mathbf{X = (A^T P A)^{-1} A^T P\, b}}$$

Rank(A) = Rank(C)

$C = (A^T * P * A)^{-1}$ è la matrice di covarianza

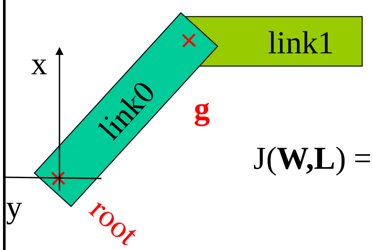
(matrice quadrata n x n)

Esempio (m = 4, n = 2)

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \\ 0 & -l_o \sin\beta \\ 0 & l_o \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * P * J)^{-1} * J^T P * b$$

$$b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix} \quad 4 \times 1 \qquad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix} \quad 2 \times 1$$



$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 \\ 0 & -l_0 \cos 45 \\ 0 & -l_o \sin 45 \\ 0 & l_o \cos 45 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$

$$J^T P\, J = \begin{bmatrix} p_1 * l_1^2 & p_1(l_1^2 + l_o l_1 \sqrt{2}/2) \\ p_1(l_1^2 + l_o l_1 \sqrt{2}/2) & p_1[(-l_1 - l_o \sin 45)^2] + p_2(l_o \cos 45)^2 + p_3(l_0 \sin 45)^2 + p_4(l_0 \cos 45)^2] \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2)

$x = (J^T P J)^{-1} * J^T P * b$ $\quad b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix}$

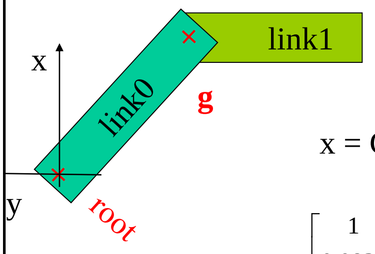
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$dP^e_x = 1$ $\quad dP^e_y = 0$

$dP^g_x = 1$ $\quad dP^g_y = 0$



$$(J^T P J) = \begin{bmatrix} 40 & 68.284 \\ 68.284 & 140.568 \end{bmatrix}$$

$$x = C * J^T * b = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

$$J * x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dP_{e_x} \\ dP_{e_y} \\ dP_{f_x} \\ dP_{f_y} \end{bmatrix}$$

più vicino al valore desiderato per il punto **e** e meno per il punto **g**

$\min \| P(Jx - b) \| = ((1-1)*10)^2 + ((0.0833-0)*10)^2 + (0.0833-1)^2 + (0.0833-0)^2$

Privilegio di alcuni gradi di libertà dell'end point

$$x = (J^T P J)^{-1} * J^T P * b$$

Attraverso P posso influenzare la soluzione

(vincolo soft sul movimento)

Sommario

- Più end-point che gradi di libertà (m > n, sistemi sovradeterminati)
- Esempi
- Privilegio di alcuni parametri dell'end-point.