



Cinematica degli scheletri



Corso di Realtà Virtuale
Laurea Magistrale in Informatica
Università degli Studi di Milano
Prof. Alberto Borghese
Laboratorio di Applied Intelligent Systems (Ais-Lab)
Dipartimento di Informatica
borgnese@di.unimi.it



A.A. 2016-2017

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Riassunto



É Dall'end-effector alla base.

É Osservazioni sulle matrici di trasformazione.

É La cinematica diretta.

É Introduzione alla cinematica inversa.

A.A. 2016-2017

2/38

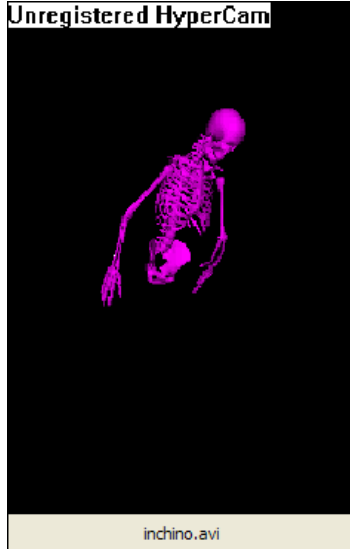
<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Cinematica di uno scheletro



Unregistered HyperCam



Curve di animazione associate ai gradi di libertà.

A.A. 2016-2017

3/38

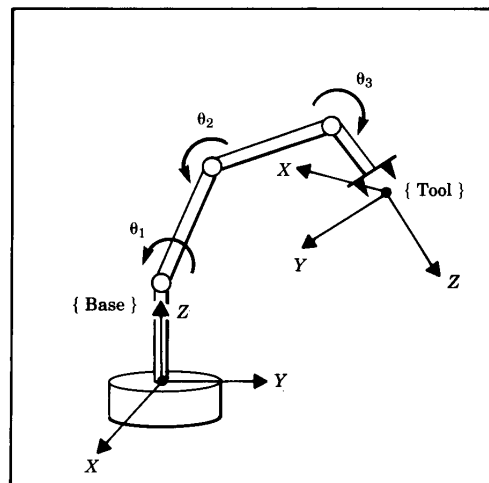
<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Cinematica diretta



Conosco il valore dei joint
(angolo o offset) \rightarrow
posizione ed orientamento
dell'end-point.




La cinematica viene descritta come sequenza di posizioni.


A.A. 2016-2017

4/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Convenzioni



$$\begin{bmatrix} {}^r X_P \\ {}^r Y_P \\ {}^r Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^e X_P \\ {}^e Y_P \\ {}^e Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^r P = {}^r A {}^e P$

Frame di riferimento
del punto


Trasformazione
del frame e nel
frame r

Spesso si numera da 0
- root


A.A. 2016-2017

5/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Posizione dei segmenti (I)



${}^e P = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$
Punto espresso nel frame dell'end-effector.

Trasformiamo ${}^e P$ fino ad
esprimerlo nel sistema di
riferimento assoluto
XYZ: ${}^{abs} P$.

A.A. 2016-2017

6/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Posizione dei segmenti (II)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P_1}_{L1}\mathbf{P} = {}^{P_1}_{L1}\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]$

${}^{P_1}_{L1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

end effector

root

A.A. 2016-2017 7/38 <http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

Posizione dei segmenti (III)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P_1}_{L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}^{P_1}_{L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} {}^{P_1}_{L1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

end effector

root

A.A. 2016-2017 8/38 <http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

Posizione dei segmenti (IV)

$${}^{P_0}_{L_0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_1}_{L_0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0}_{P_1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2016-2017 9/38 <http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

Posizione dei segmenti (V)

$${}^{P_0}_{ABS}P = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_1}_{L_0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0}_{P_1}A = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2016-2017 10/38 <http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

Posizione dei segmenti (VI)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{ABS_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS_ABS}_{P0_ABS}\mathbf{A} \ P0_ABS\mathbf{P} =$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^{ABS_ABS}_{P0_ABS}\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P0_ABS\mathbf{P} =$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Labels: link0, link1, end effector, root.

A.A. 2016-2017 11/38 <http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Posizione dei segmenti: fattorizzazione

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{ABS_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS_ABS}_e\mathbf{A} \ e\mathbf{P} =$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

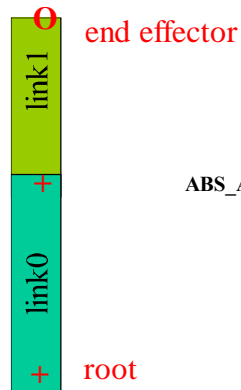
${}^{ABS_ABS}_e\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2016-2017 12/38 <http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

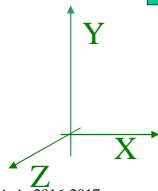


Esempio di calcolo della posizione



$$\alpha = \beta = 0$$

$$\text{ABS_ABSP} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_0 + T_x \\ T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2016-2017

13/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Riassunto



É Dall'end-effector alla base.

É Osservazioni sulle matrici di trasformazione.

É La cinematica diretta.

É Introduzione alla cinematica inversa.

A.A. 2016-2017

14/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Dall'end-effector alla base



È il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della **geometria** (lunghezze dei segmenti) e dei **parametri liberi** (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).

Le rotazioni vengono definite in un **sistema di riferimento locale**.

Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre:

$${}^{ABS_ABS}P = [{}^{ABS_ABS}P_0_ABS A \quad {}^{P_0_ABS}P_0_10 A \quad {}^{P_0_10}P_1_10 A \quad {}^{P_1_10}P_1_11 A \quad {}^{P_1_11}P_1 A] e P$$

fattorizzare le matrici di trasformazione.

$${}^{ABS_ABS}P = [{}^{ABS_ABS}P_0_ABS A \quad {}^{P_0_ABS}P_0_10 A \quad {}^{P_0_10}P_1_10 A \quad {}^{P_1_10}P_1_11 A \quad {}^{P_1_11}P_1 A] e P$$

A.A. 2016-2017

15/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Osservazioni sulle matrici di trasformazione, A



Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base.

A è funzione di:

Geometria

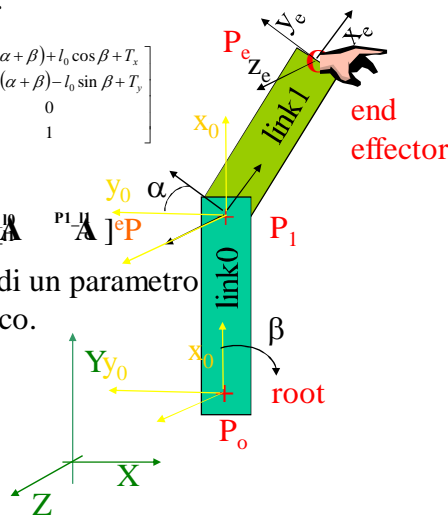
Parametri liberi

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{ABS_ABS}P = [{}^{ABS_ABS}P_0_ABS A \quad {}^{P_0_ABS}P_0_10 A \quad {}^{P_0_10}P_1_10 A \quad {}^{P_1_10}P_1_11 A \quad {}^{P_1_11}P_1 A] e P$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$${}^{ABS_ABS}P = [{}^{ABS_ABS}P_0_ABS A(T) \quad {}^{P_0_ABS}P_0_10 A(\beta) \quad {}^{P_0_10}P_1_10 A(l_0) \quad {}^{P_1_10}P_1_11 A(\alpha) \quad {}^{P_1_11}P_1 A(l_1)] e P$$



A.A. 2016-2017

16/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Quante matrici di trasformazione?



É Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
É Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
É Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.

É Notazione molto generale (approccio costruttivo).
É Notazione prolissa.



Riassunto



- É Dall'end-effector alla base.
- É Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- É **La cinematica diretta.**
- É Introduzione alla cinematica inversa.

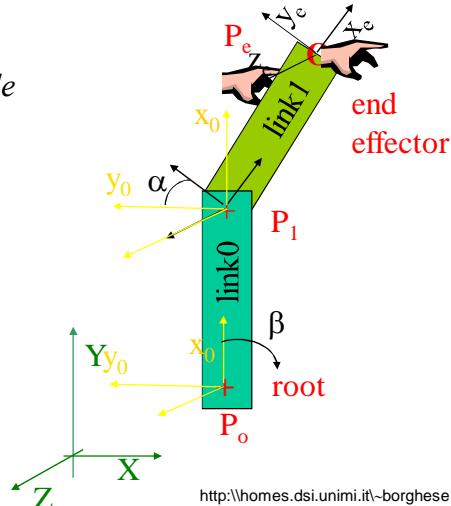


La cinematica diretta



Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento di ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint, dalla base all'end-effector.



A.A. 2016-2017

19/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>



Come animare uno scheletro



Data la sequenza di angoli (**relativi**) è possibile determinare istante per istante la posizione del braccio robotico.

Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?

A.A. 2016-2017

20/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese>

Joint space (peso dei joint)

Rotazione attorno a P_0 (angolo β)

Rotazione attorno a P_1 (angolo α)

La posizione dell'end effector è diversa a parità di rotazione.

A.A. 2016-2017 21/38 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)

end effector

$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

root

$${}_{ABS_ABS}P(t) = {}_{ABS_ABS}A(t) e^P$$

${}_{ABS_ABS}P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$

${}_{ABS_ABS}P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$

${}_{ABS_ABS}P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$

A.A. 2016-2017 22/38 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Descrizione cinematica diretta

$${}^{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{ABS_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^{ABS_ABS}P(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$

Sequenza temporale di $[\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)] \rightarrow$ sequenza temporale di ${}^{ABS_ABS}P(t)$.

ghese

Riassunto

- É Dall'end-effector alla base.
- É Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- É La cinematica diretta.
- É Introduzione alla cinematica inversa.**

A.A. 2016-2017 24/38 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese



La cinematica inversa



Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.



Problema sotto-determinato (over-constrained).
Comportamento stereotipato. Perché?

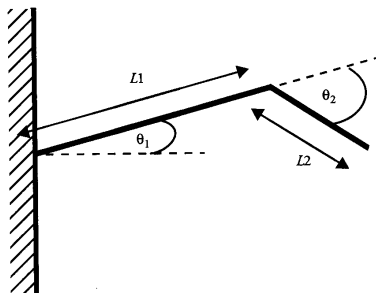
A.A. 2016-2017

25/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

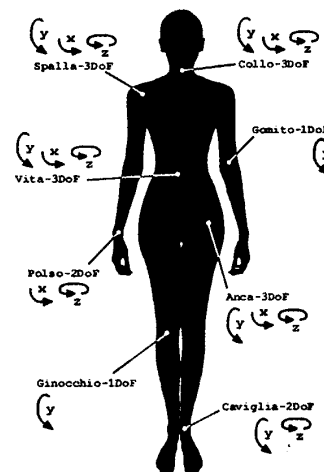


Cerniere 3D



∞^1 soluzioni

NB: gli umani ne scelgono una sola.



Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.

A.A. 2016-2017

26/38

<http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.
 $\mathbf{P}(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$

$$\mathbf{ABS_ABSP}(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2016-2017 27/38 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)

$\mathbf{ABS_ABSP}(t) = \mathbf{ABS_ABS}_e \mathbf{A}(t) \mathbf{eP}$

$\mathbf{ABS_ABSP}_x(t) = \mathbf{f}_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$

$\mathbf{ABS_ABSP}_y(t) = \mathbf{f}_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$

$\mathbf{ABS_ABSP}_z(t) = \mathbf{f}_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$

Ciascuna di queste funzioni è rappresentata come prodotto di una riga della matrice **A** per **P**.

A.A. 2016-2017 28/38 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint \rightarrow end_point.

$${}^{Abs}P_e(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^e A(t) {}^e P_e(t)$$

$${}^{ABS_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
 $\alpha(t) = f^*(l_0, l_1, P_e(t))$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!

A.A. 2016-2017 29/38 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese

Cinematica inversa

Viene definita la traiettoria dell'end-point.
 Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

A.A. 2016-2017 30/38 http://homes.dsi.unimi.it/~borghese



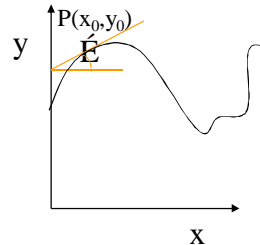
Linearizzazione – 1 variabile



$$y_0 = f(x_0)$$

$$dy = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_0} dx^2 + \dots$$

$$y - y_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x$$



Sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine = linearizzazione

É Lo sviluppo di Taylor vale nell'intorno di $P(x_0, y_0)$.

É Si ottiene un'approssimazione a meno di infinitesimi del secondo ordine.

Cosa succede per funzioni di più variabili ($\mathbf{P}(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | I_0, I_1)$)?



Sviluppo in serie di Taylor di funzioni di più variabili



$$z = f(x, y)$$

$$z - z_0 = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P=P_0} dx + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P=P_0} dy + \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{P=P_0} dx^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{P=P_0} dx dy + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{P=P_0} dy^2 \right\} + \dots$$

Parte lineare



Sistema di equazioni lineari



Consideriamo la trasformazione **diretta** joint \rightarrow end_point.

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

$$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1).$$

Chiamiamo $\mathbf{W}_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$ il valore dei parametri liberi all'istante t_k .

$$P_x - P_{x_k} = \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} (\beta - \beta_k) + \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} (T_x - T_{x_k}) + \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} (T_y - T_{y_k})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} (\beta - \beta_k) + \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} (T_x - T_{x_k}) + \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} (T_y - T_{y_k})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_k} (\alpha - \alpha_k) + \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{\mathbf{w}_k} (\beta - \beta_k) + \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{\mathbf{w}_k} (T_x - T_{x_k}) + \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{\mathbf{w}_k} (T_y - T_{y_k})$$



Caratteristiche della cinematica inversa



- É Soluzione di equazioni non-lineari.
- É Workspace (spazio nel quale si può posizionare l'end-effector).
- É Dexterous workspace. Spazio nel quale si può posizionare l'end-effector con un qualsiasi orientamento.
- É C.N. Per potere raggiungere una qualsiasi posizione ed orientamento nello spazio di lavoro, è che il numero di gradi di libertà dei segmenti del braccio robotico sia almeno uguale al numero di gradi di libertà dell'end-point.
- É Soluzione geometrica od analitica complessa da determinare.

Soluzione diretta

Working space

Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \leq \|P\| \leq L_1 + L_2$

Possibili configurazioni:
 P_1 - nessuna soluzione.
 P_2 - due soluzioni.
 P_3 - una soluzione.

A.A. 2016-2017 35/38 <http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>

Soluzione diretta (calcolo) - I

Dato X, Y devo determinare θ_1 e θ_2
 Equazioni non-lineari in $[X, Y | L_1, L_2]$

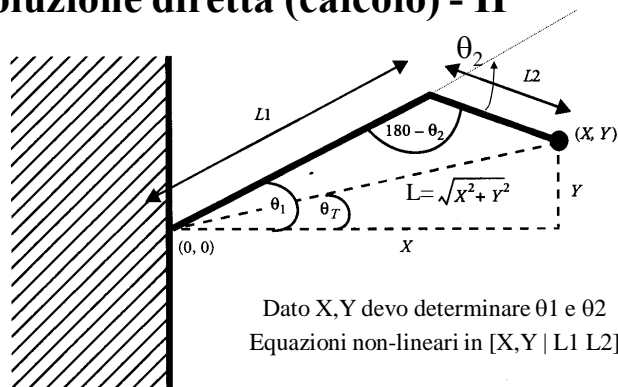
È un problema di trigonometria!

È calcolo $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$
 È teorema di Carnot per calcolare $\cos(180 - \theta_2)$:
 È $\cos(180 - \theta_2) = (L_1^2 + L_2^2 - L^2) / (2L_1L_2)$

A.A. 2016-2017 36/38 <http://homes.dsi.unimi.it/~borgnese>



Soluzione diretta (calcolo) - II



Dato X, Y devo determinare θ_1 e θ_2
Equazioni non-lineari in $[X, Y | L_1 L_2]$

Calcolo di $\cos\theta_T$:

É Teorema di Carnot per calcolare $\cos(\theta_1 - \theta_T)$: $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$$\cos(\theta_T) = X / \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \cos(\theta_R) = (L_1^2 + L^2 - L_2^2) / (2L_1 L)$$

$$\theta_1 = \theta_R + \theta_T$$



Riassunto



- É Dall'end-effector alla base.
- É Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- É La cinematica diretta.
- É Introduzione alla cinematica inversa.