



Realtà Virtuale

From 3D to 2D and back to 3D

Prof. Alberto Borghese

Dipartimento di Informatica

alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano



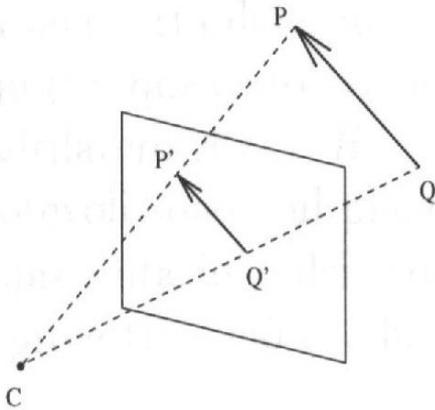
Sommario



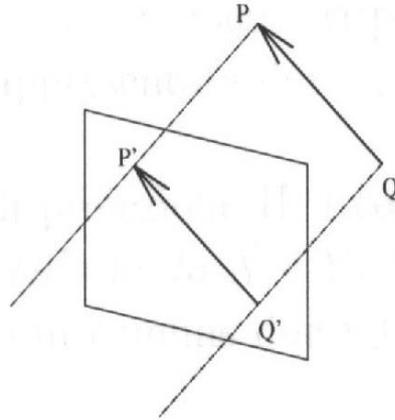
- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione
- Ricostruzione 3D



Proiezione centrale verso proiezione ortogonale



1)



2)

- 1) X' dipende da X e Z .
- 2) X' non dipende da Z , ma solo da X .

$P(X, Y, Z)$ viene proiettato su un piano (piano immagine) nel punto $P'(X', Y')$. Z è la distanza dal piano immagine.

Proiezione centrale: centro di proiezione al finito.

Proiezione ortogonale: centro di proiezione all'infinito.



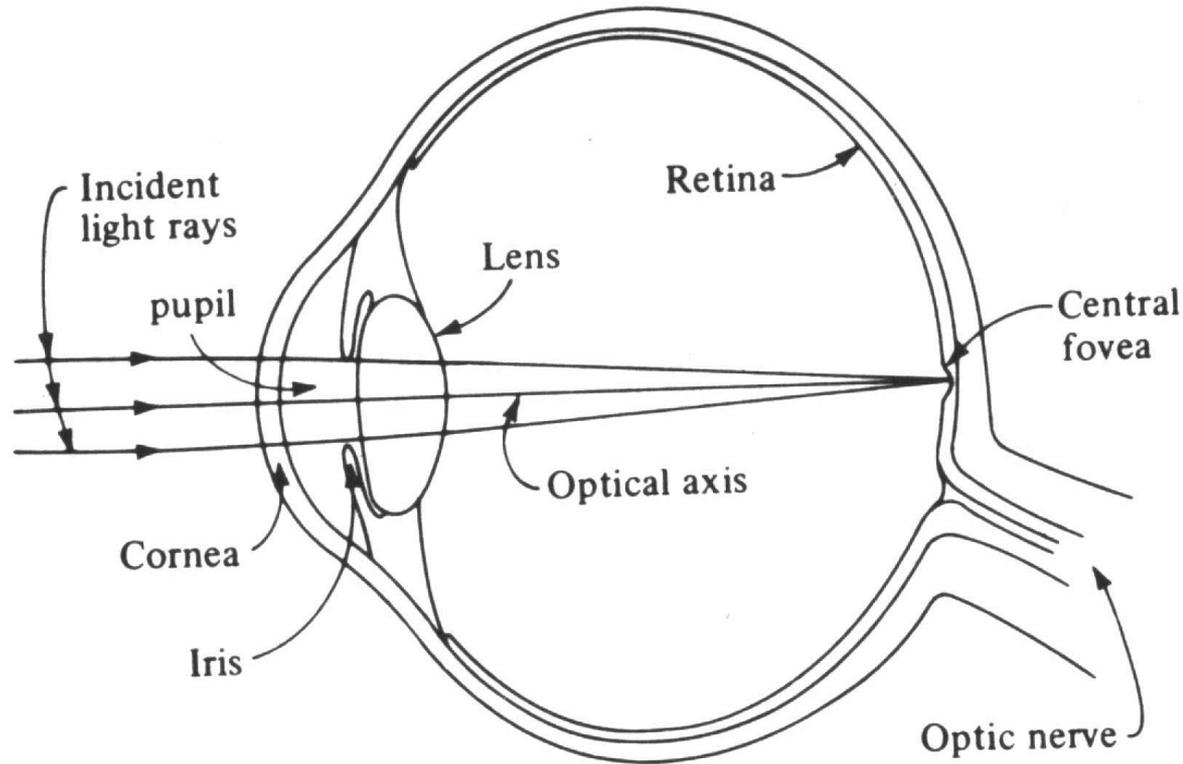
Dal 3D al 2D

Come si forma un'immagine?

- Scena con oggetti riflettenti.
- Sorgente di illuminazione
- Piano di rilevazione della luce riflessa.

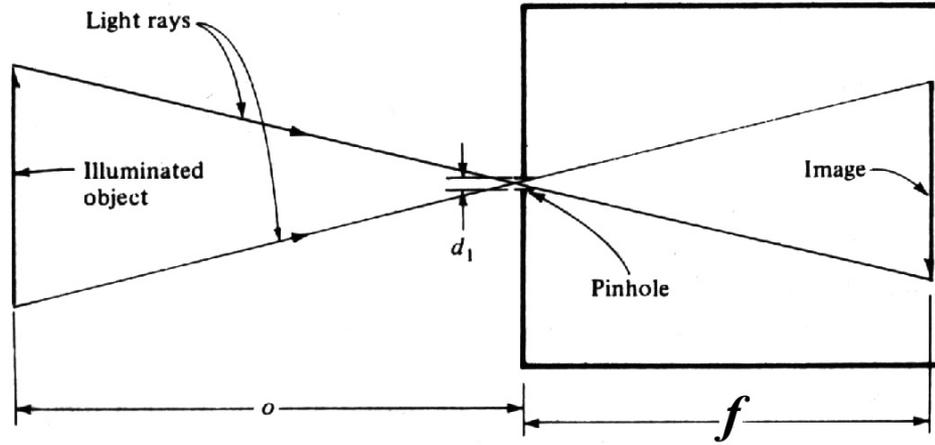
Il motore di questa trasformazione è la **proiezione prospettica**.

L'occhio umano

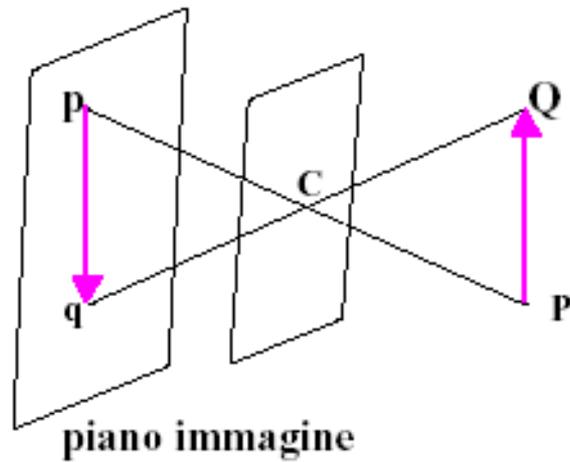


Its behavior is very similar to that of a camera

La pin-hole camera

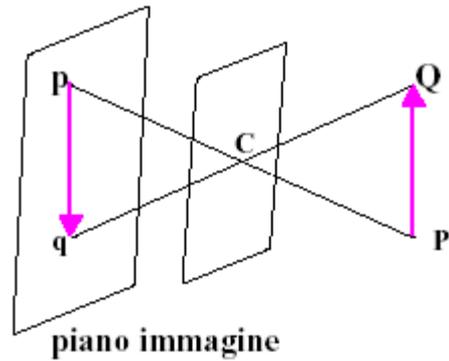


Proiezione prospettica:
tutti i raggi di proiezione
passano per un unico punto,
detto **centro di proiezione**.

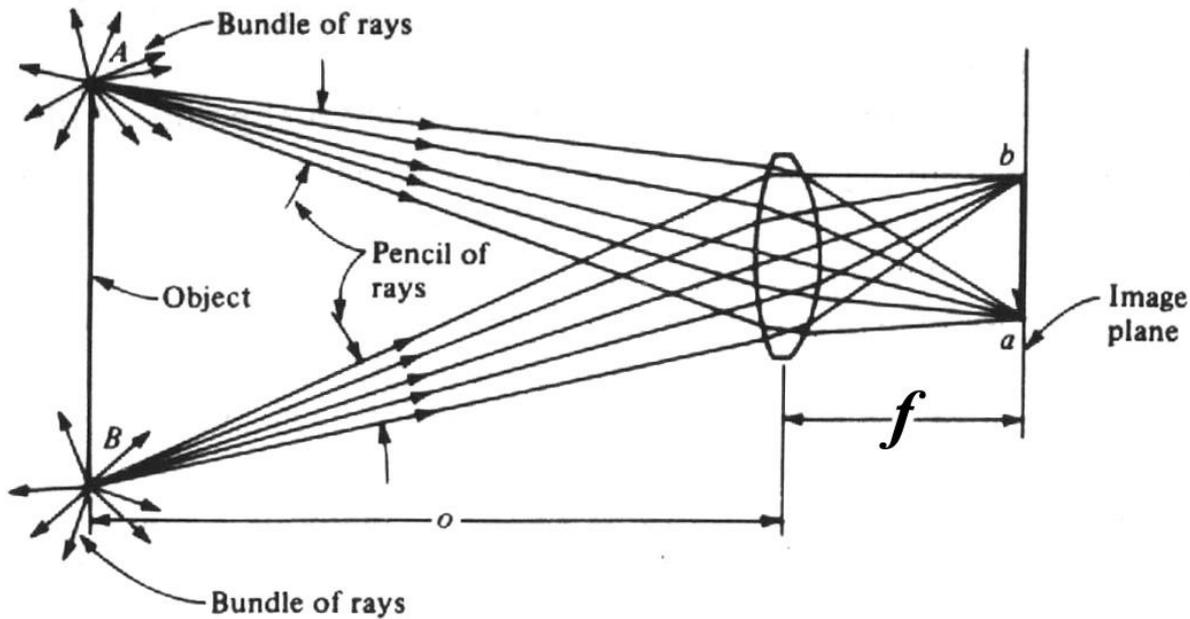


Pinhole camera

La lente

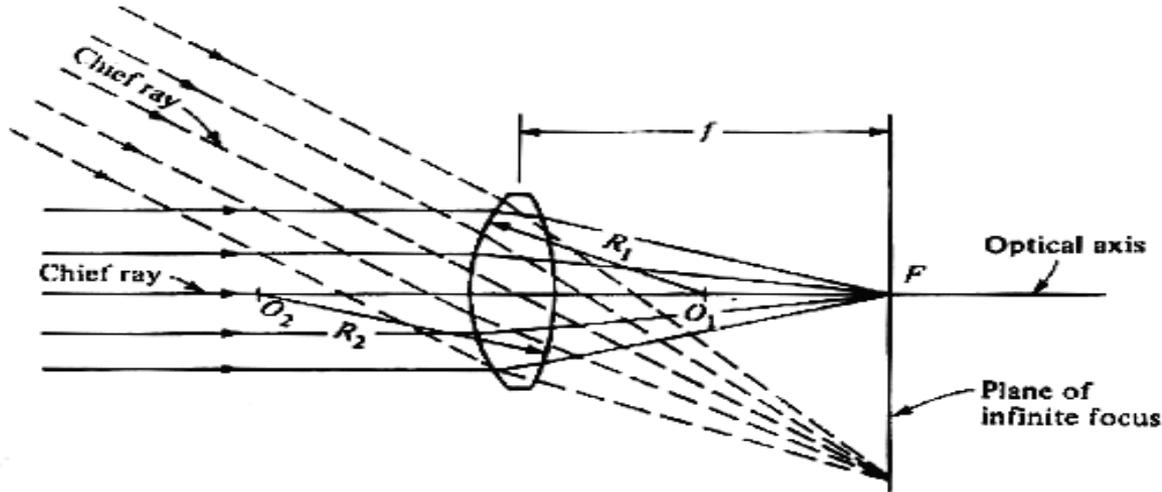


Pinhole camera



Lente convergente

Geometria dell'ottica

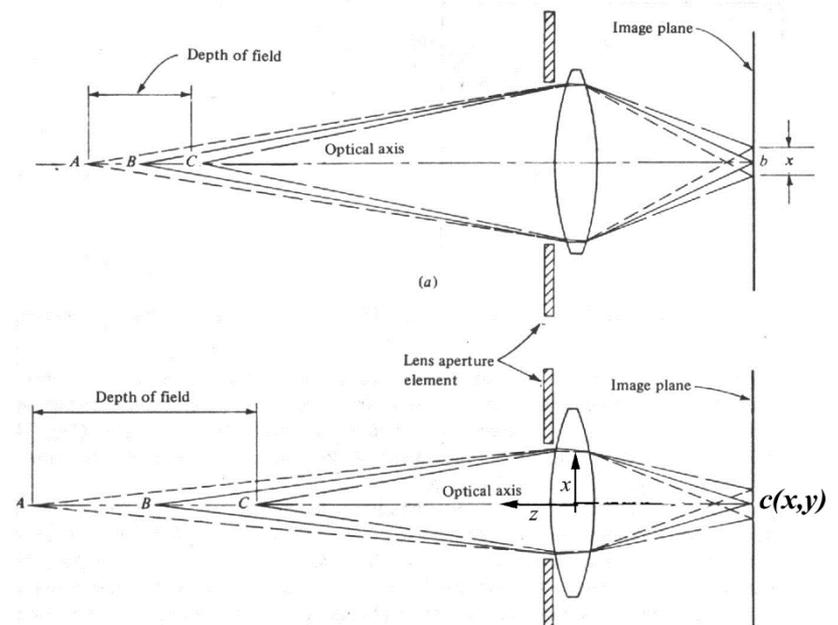


Oggetti all'infinito

- **Distanza focale**: distanza del piano immagine quando un oggetto si trova all'infinito.
- **Asse ottico**: raggio che non viene deviato dalla lente.
- Intersezione dell'asse ottico con il piano immagine dà il **punto principale (F)**.

Messa a fuoco

Problema della messa a fuoco

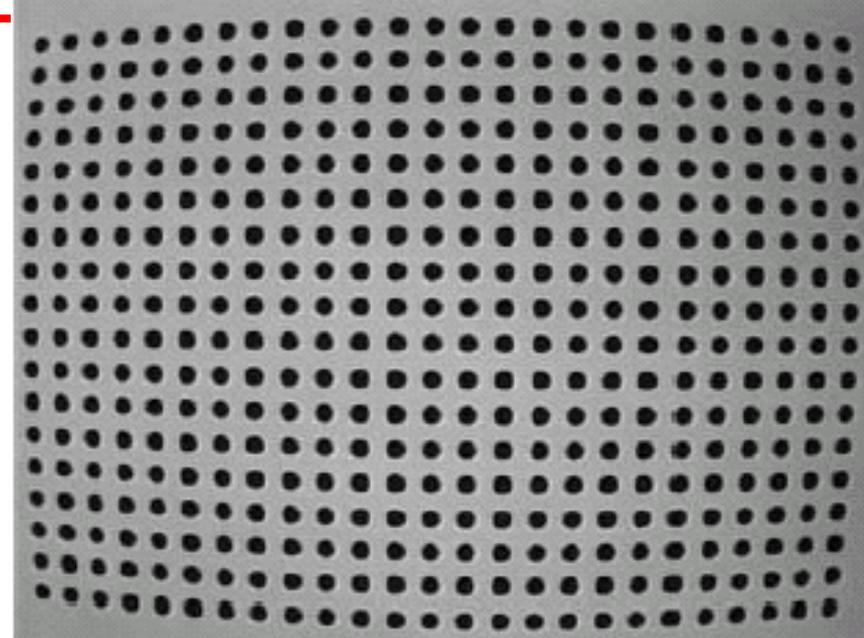


Parametri di camera (o intrinseci):

- Punto principale $c(x,y)$ + lunghezza focale, f (3 parametri).
- Occorre conoscere anche il fattore di forma dei pixel nel caso di immagini digitali (è una costante, non un parametro).
- (Distorsioni).



Esempi di Distorsioni



Ottime per effetti speciali, un po' meno per delle misure.....
Le camere non sono metriche.



Distorsioni



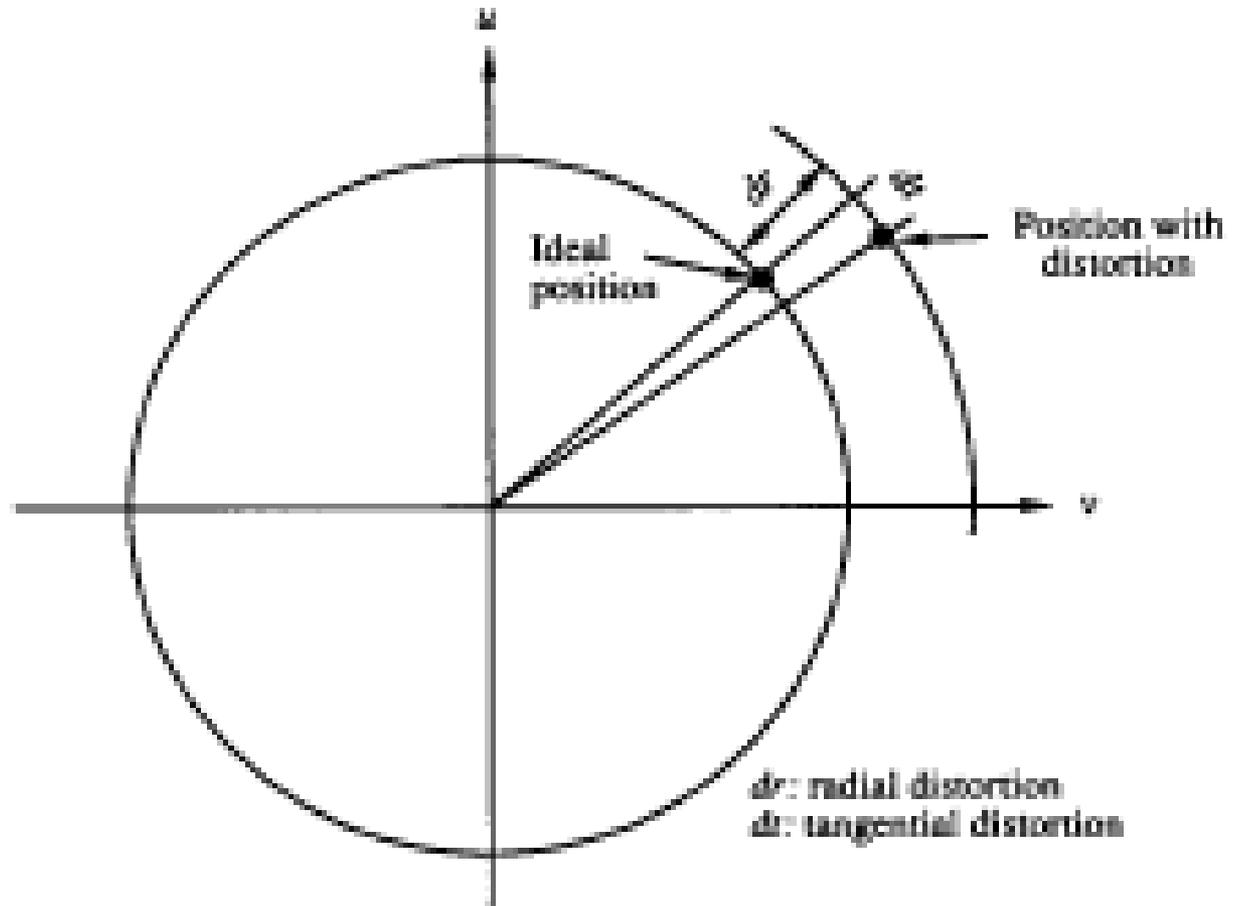
Distorsioni radiali.

Distorsioni tangenziali.

Shrinkage ($x' = \lambda x$, $y' = y$).

$$x_m = x + f(x,y)$$

$$y_m = y + g(x,y)$$



dr : radial distortion
 α : tangential distortion



Distorsioni radiali



A cuscinetto

$$dr(p) = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + \dots$$

$$r = |p - p_0|$$

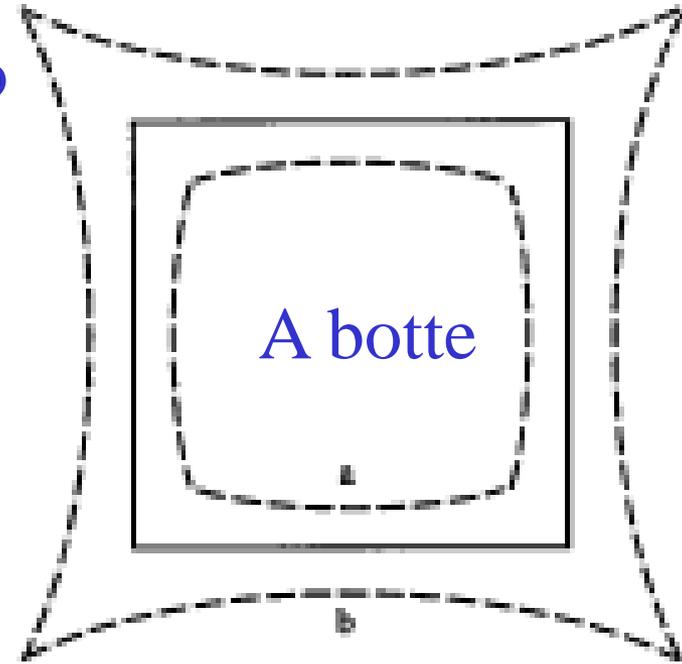
Rappresentazione polare:

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$dx(p) = k_0 x + k_1 x(x^2 + y^2) + O[(x,y)^5]$$

$$dy(p) = k_0 y + k_1 y(x^2 + y^2) + O[(x,y)^5]$$



Il parametro k_0 non si considera perchè corrisponde ad una variazione di scala.



I modelli di distorsioni



Semplificazioni possibili delle equazioni che modellano i parametri di distorsione

1	Radial Polynomial 3rd Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y$	(1)
2	Radial Polynomial 5th Degree	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 r^4 x$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_2 r^4 y$	(2)
3	Radial and Tangential	$\Delta x = k_1 r^2 x + k_2 (r^2 + 2x^2) + k_3 2xy$ $\Delta y = k_1 r^2 y + k_3 (r^2 + 2y^2) + k_2 2xy$	(3)

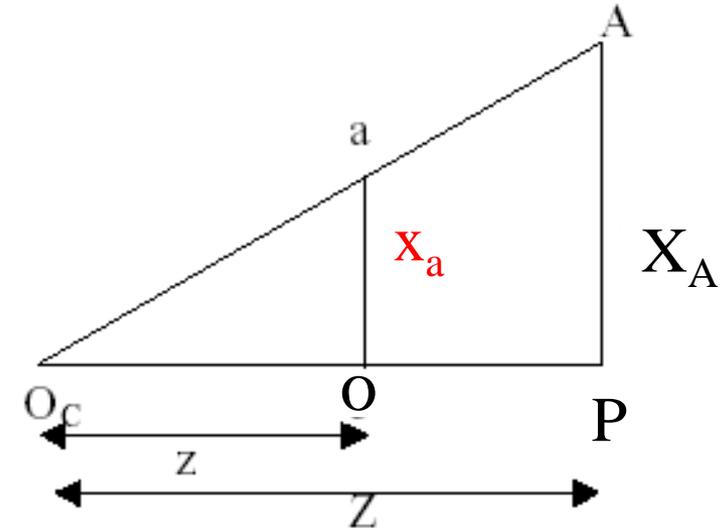
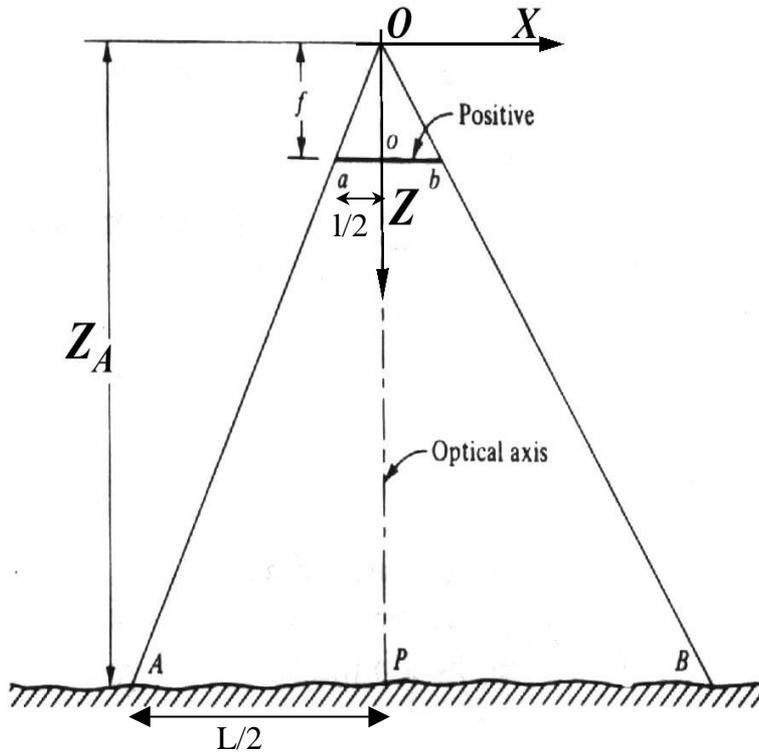
In alternativa: modelli semi-parametrici che fittano il campo di distorsione a partire da misure prese sul campo.



Raddrizzamento dell'immagine



Tutte le coordinate misurate rispetto a un centro comune



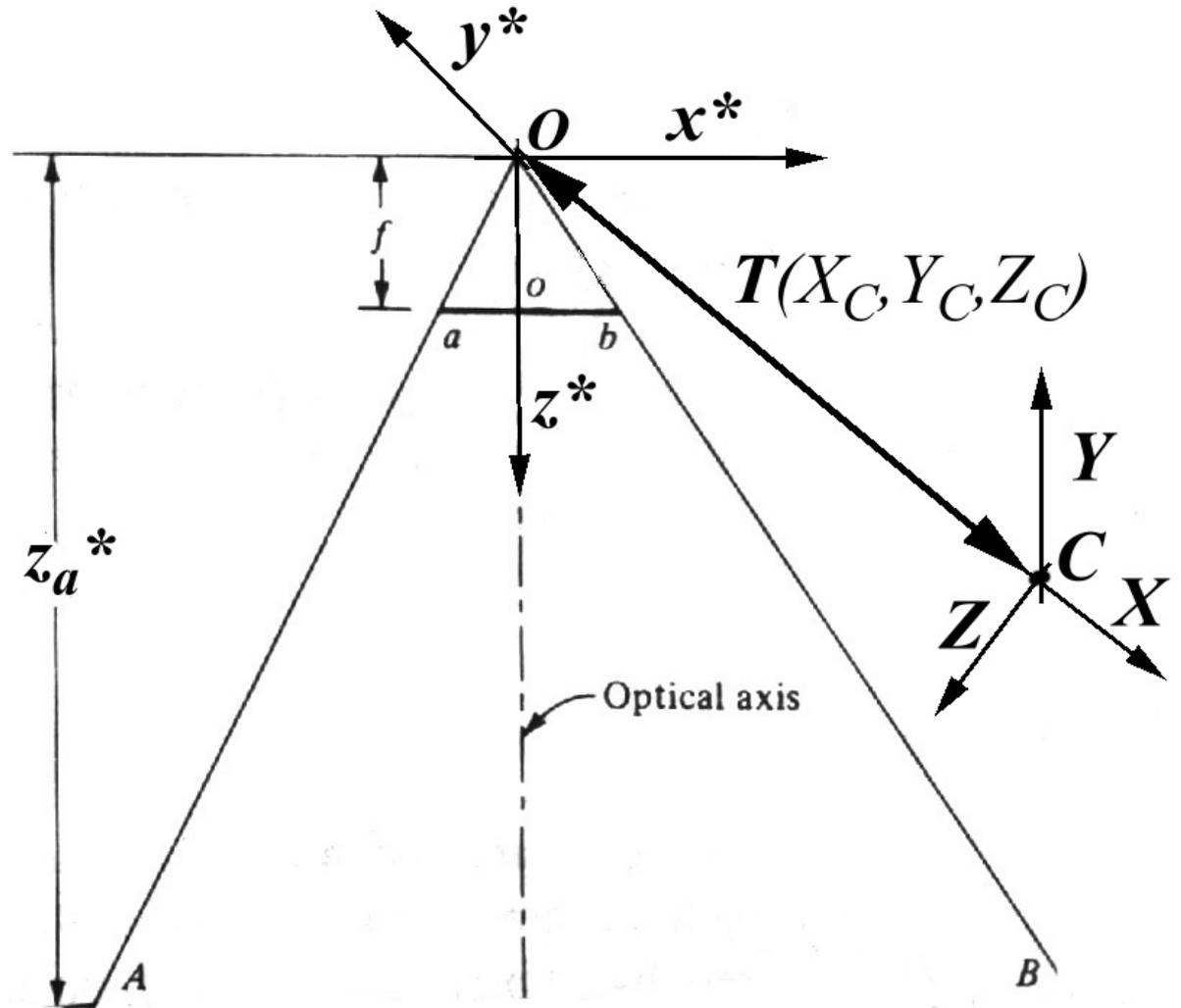
Per similitudine fra i triangoli aOb e AOB :
 $Oo : OP = ao : AP$

$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = X_A f / Z_A \\ y_a = Y_A f / Z_A \end{cases}$$

I parametri esterni

- **Traslazione:**
3 componenti:
 $T(X_C, Y_C, Z_C)$.

- **Rotazione**
 $R_{3 \times 3}(\omega, \phi, k)$



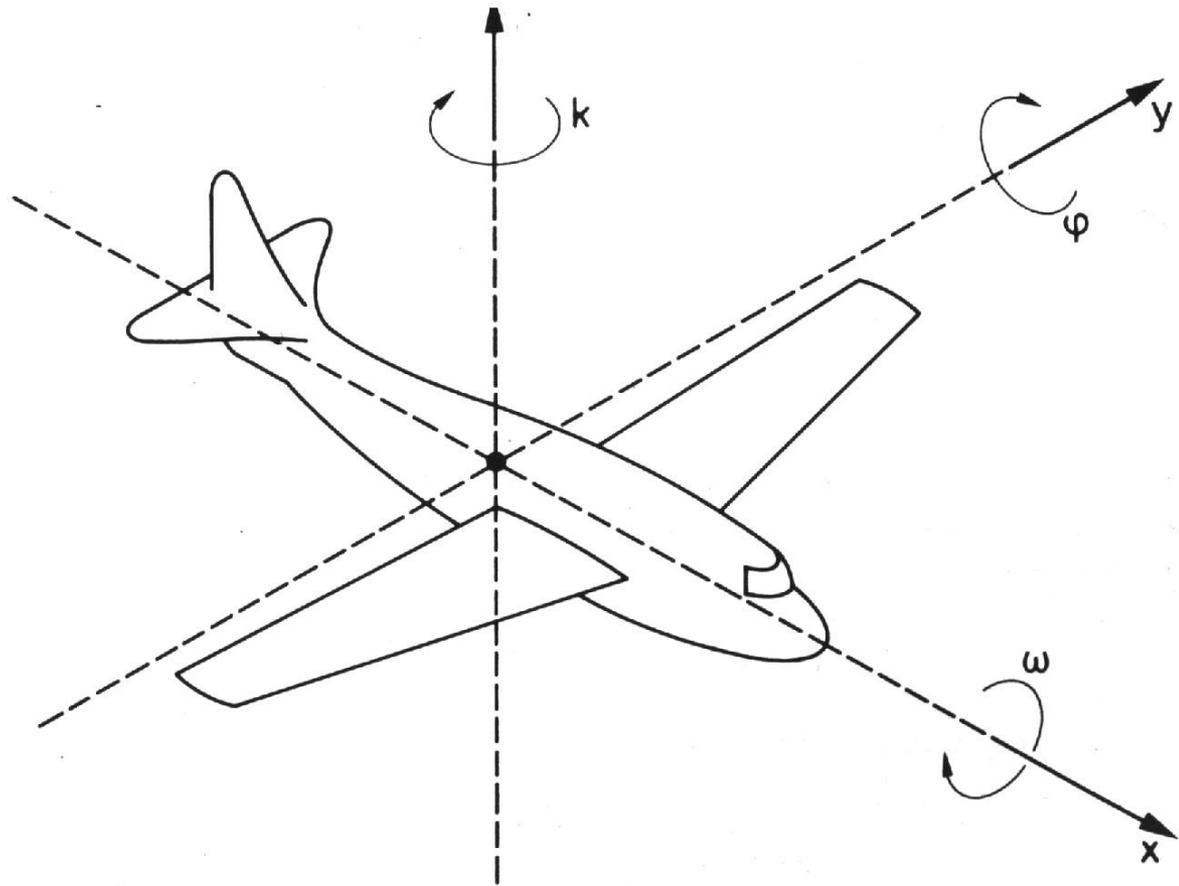


Angoli di orientamento nello spazio 3D



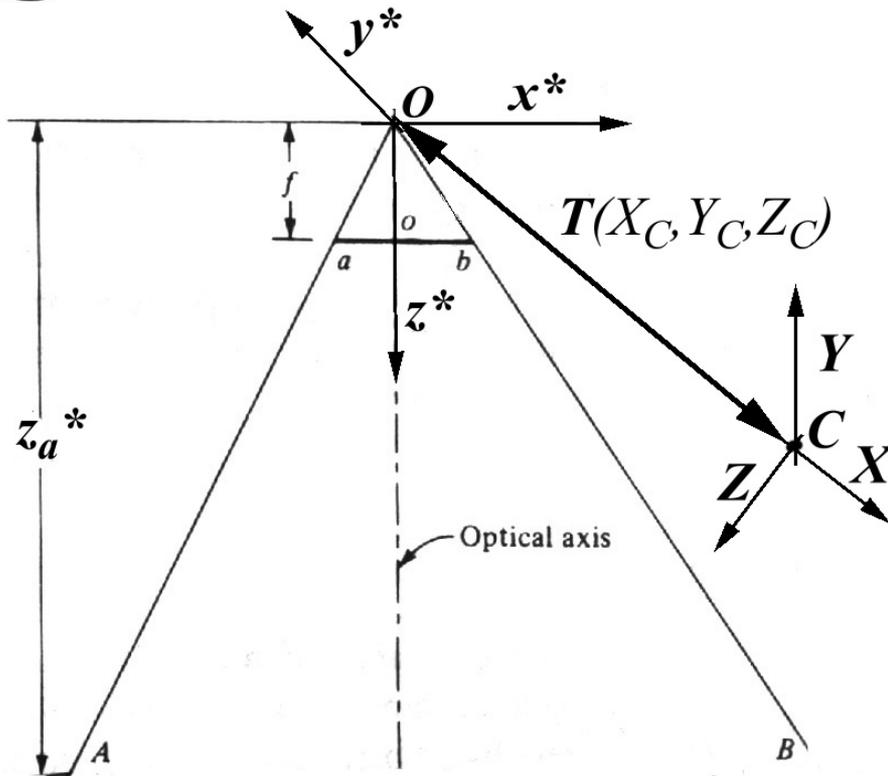
Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω , ϕ , k): rollio, beccheggio e deriva.

Sono 3 rotazioni sequenziali,
non commutative.





Dal 3D al 2D



$$a(x_a; y_a) \begin{cases} x_a = X_A^* f / Z_A^* \\ y_a = Y_A^* f / Z_A^* \end{cases}$$

$$P_A^* = R (P_A - T)$$

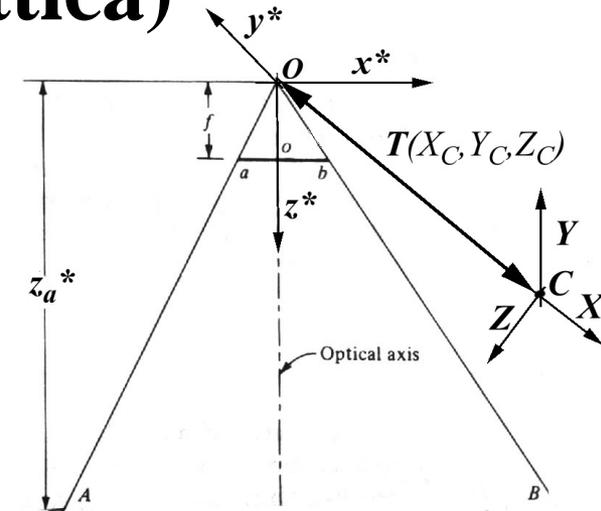
$$P(X_A, Y_A, Z_A) \Rightarrow P_A^*(X_A^*, Y_A^*, Z_A^*) \Rightarrow a(x_a, y_a).$$

Equazioni di collinearità (rappresentazione prospettica)

$$x^*_A = r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)$$

$$y^*_A = r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)$$

$$z^*_A = r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)$$



$$x_a - x_o = x^*_A \frac{f}{z^*_A} = f \frac{r_{11}(X_A - X_C) + r_{12}(Y_A - Y_C) + r_{13}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

$$y_a - y_o = y^*_A \frac{f}{z^*_A} = f \frac{r_{21}(X_A - X_C) + r_{22}(Y_A - Y_C) + r_{23}(Z_A - Z_C)}{r_{31}(X_A - X_C) + r_{32}(Y_A - Y_C) + r_{33}(Z_A - Z_C)}$$

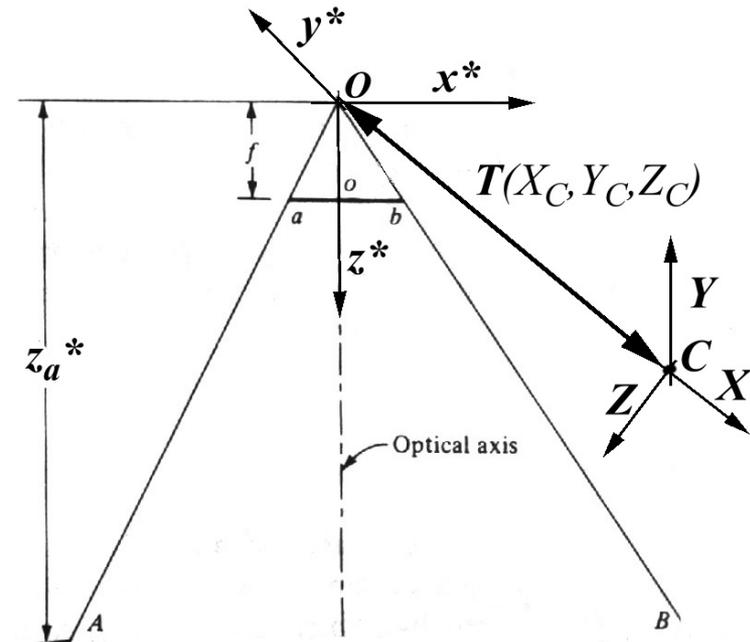
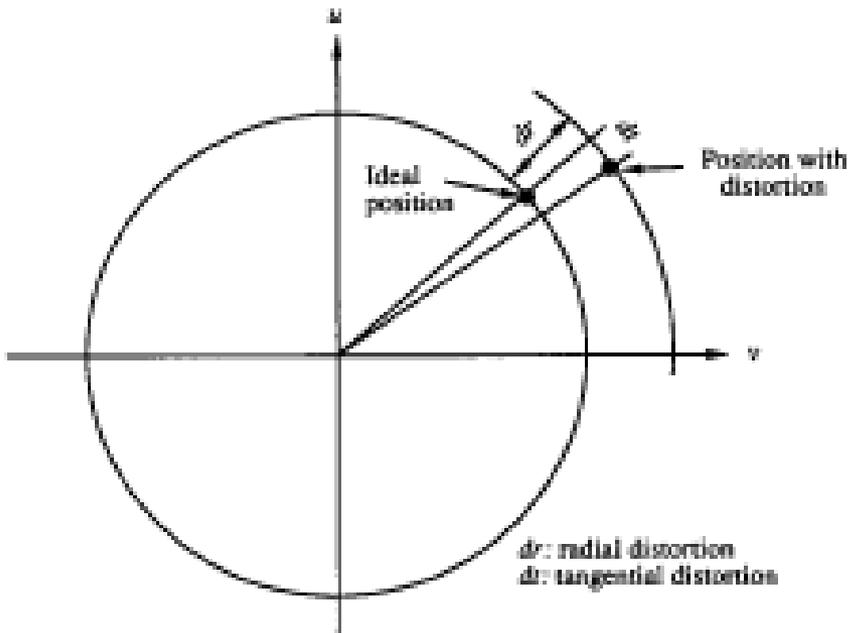
Complessivamente 9 parametri. Equazioni non-lineari.



Modello reale della ripresa fotografica



$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$
$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$



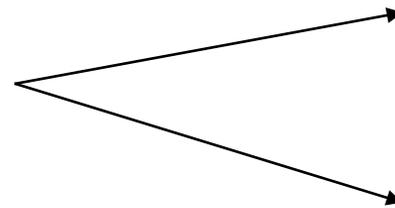


Tassonomia dei parametri



$P^3 \rightarrow p^2$

Interior parameters

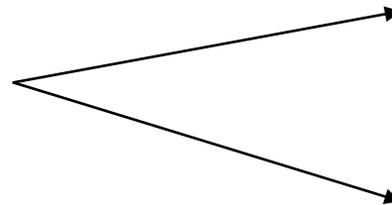


Focal length, f

Principal point (x_0, y_0)

$P^3 \rightarrow P^3$

Exterior parameters



Orientation (ω, ϕ, κ)

Position (X_0, Y_0, Z_0)

$p^2 \rightarrow p^2_m$

Distortion parameters: $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$
 $(f(x, y, x_0, y_0); g(x, y, x_0, y_0))$

$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$



Sviluppo della matrice di proiezione



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_o \\ 0 & f & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{KMA} \quad \mathbf{P} = \mathbf{HP}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Che forma ha H?



Sommario



- La trasformazione proiettiva
- **Calibrazione**
- Ricostruzione 3D



Set-up



Passive vision systems do not constraint cameras position.

Cameras have to be positioned to get the best volume coverage (every feature should be surveyed by at least two cameras) and to **view the volume of interest!**

Set-up requires:

- Cameras position
- Focusing (and possibly choice of a proper lens)
- Lens opening

Not all the cameras should view the same volume region.

**Optimal set-up may require some time
and/or
Multiple cameras are used.**



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

3 attori:

A) I punti nello spazio 3D: $\{X, Y, Z\}$

B) I punti misurati sul piano immagine $\{x, y\}$

C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

A) + B) \rightarrow Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).

B) + C) \rightarrow Ricostruzione (ray intersection, VR).

A) + C) \rightarrow Proiezione (augmented reality).



In che cosa consiste la calibrazione



Determinazione dei parametri o di un loro sottoinsieme.

Determinazione dei parametri della trasformazione prospettica:

- Parametri esterni: $X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k)$.
- Parametri interni: x_o, y_o, f .
- Parametri di distorsione (o parametri aggiuntivi): $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1,$
.....

$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{21}(Y - Y_o) + m_{31}(Z - Z_o)}{m_{13}(X - X_o) + m_{23}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{32}(Z - Z_o)}{m_{13}(X - X_o) + m_{23}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

Quale problema intravedete?



Perchè calibrare?



- Per ottenere misure e ricostruzione **precise** degli oggetti.
- Per ricavare i parametri corretti della camera (focale, punto principale).
- Per rimuovere gli effetti della **distorsione** delle lenti (errori sistematici).
- Molto praticata in fotogrammetria / ridotta al minimo in computer vision.



Calibrations



2D calibration (camera calibration, estimate of interior parameters).

3D calibration (estimate of the exterior parameters).



Camera Calibration (determinazione dei parametri interni)



On the bench – surveying a regular grid of fiducial points (→ camere metriche).

Off the bench (on the field) – distortion parameters are estimated with the geometrical parameters of the set-up (external parameters).





Calibrazione con punti in posizione nota



- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

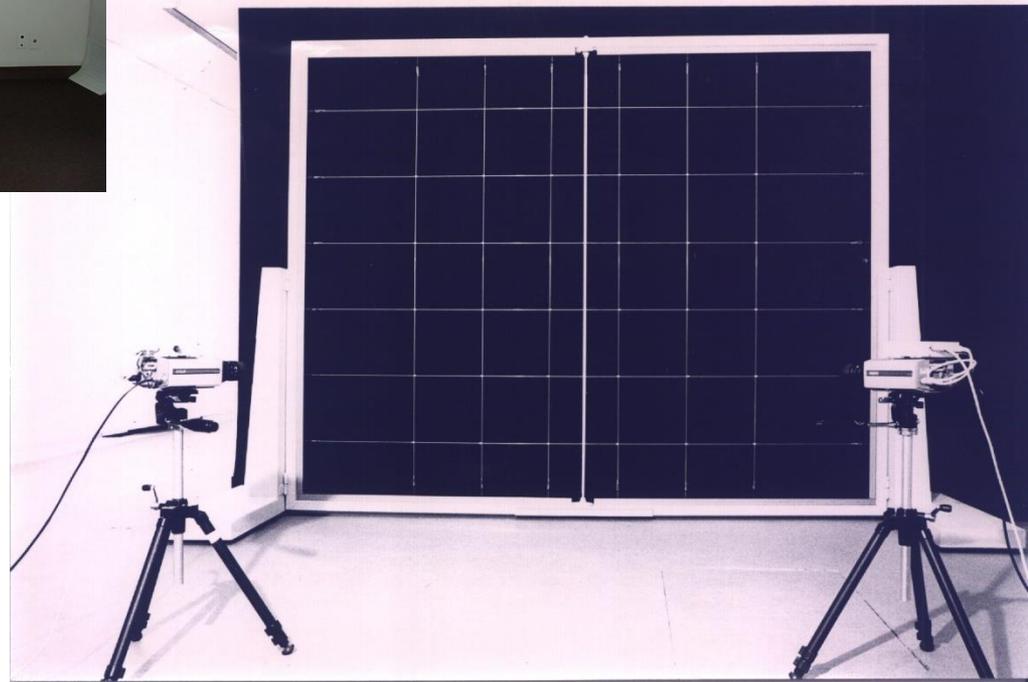
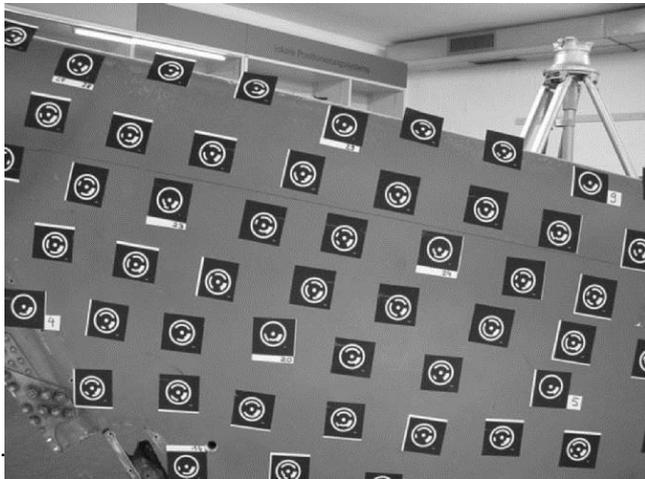
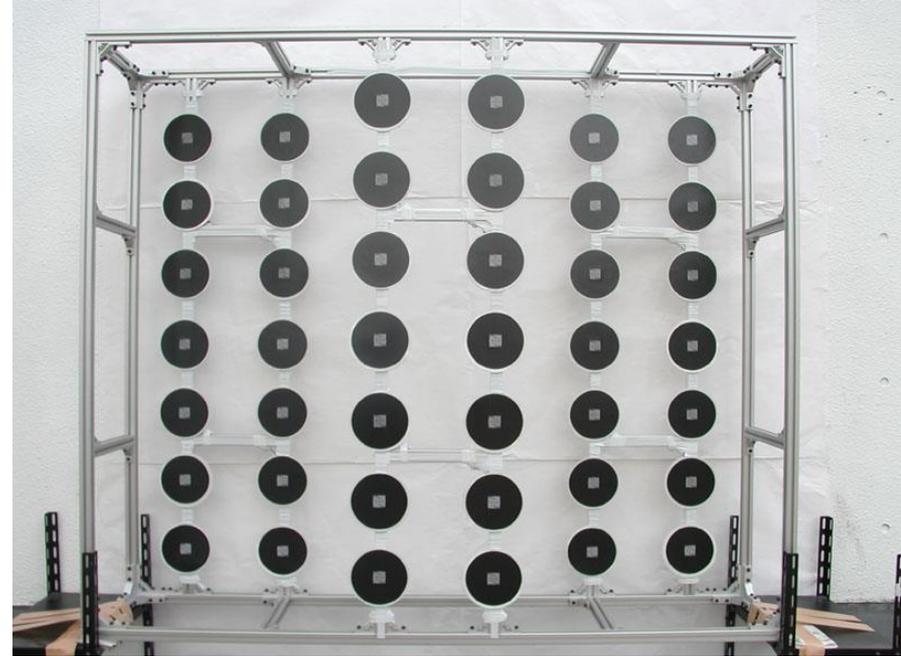
Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.
Ho $9 + D$ parametri aggiuntivi.

Ho bisogno di $(9 + D) / 2$ punti di controllo.



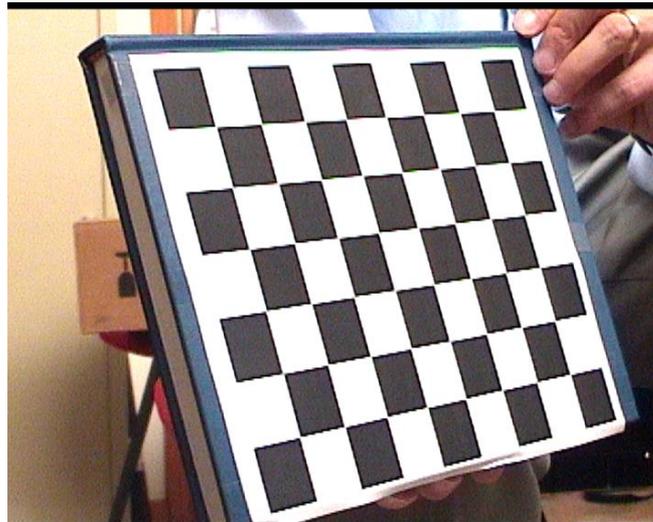
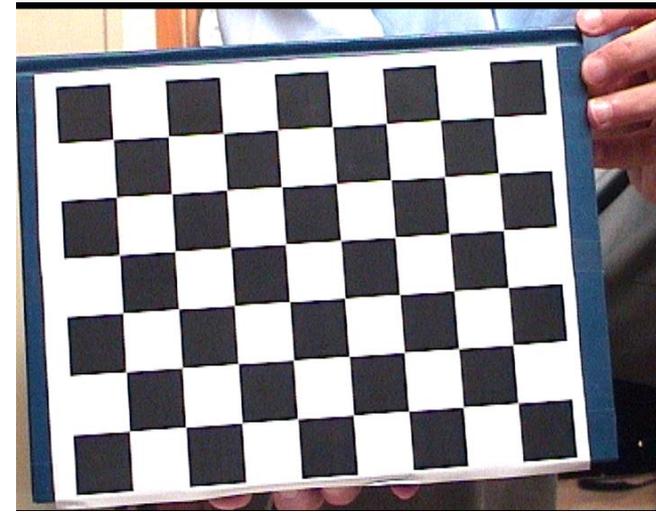
Test field (Known control points)

3D structures, which carry the control points are required. They should cover the working volume.



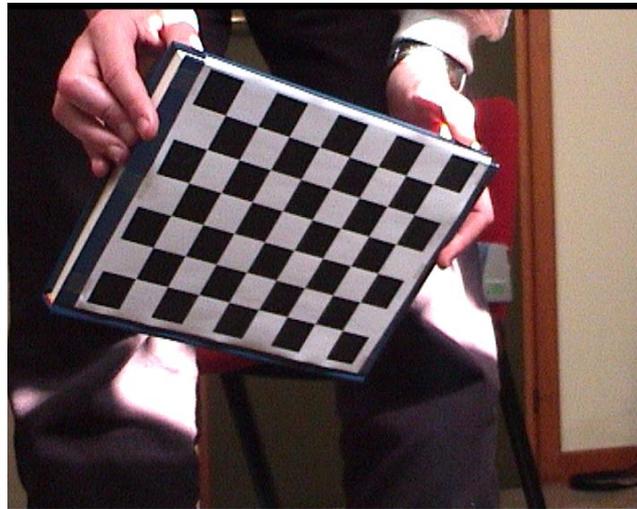
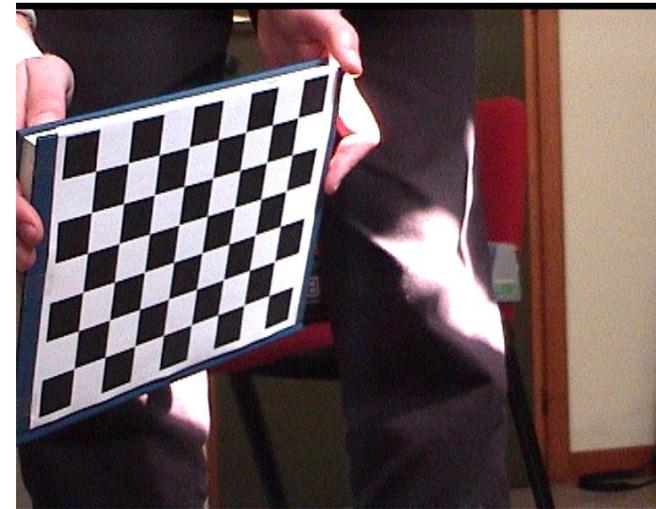


Calibration through a chessboard



Estimated
parameters:

Distortions
Internal
External

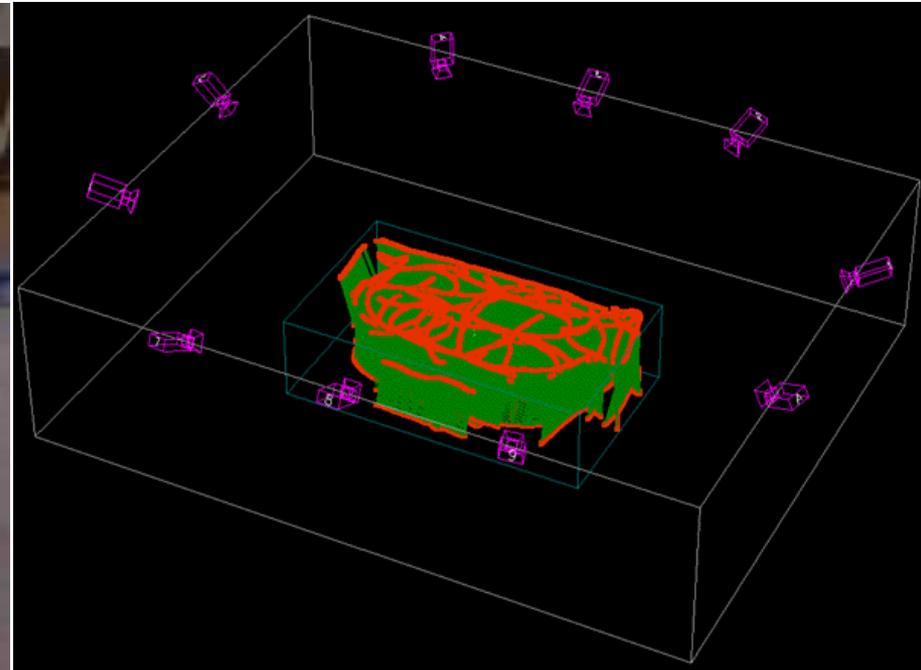


<http://www.intel.com/research/mrl/research/opencv/>

Wand Calibration

2 steps:

- Establish external reference system (and initialize estimate)
- “Refinement”: estimate of the parameters.



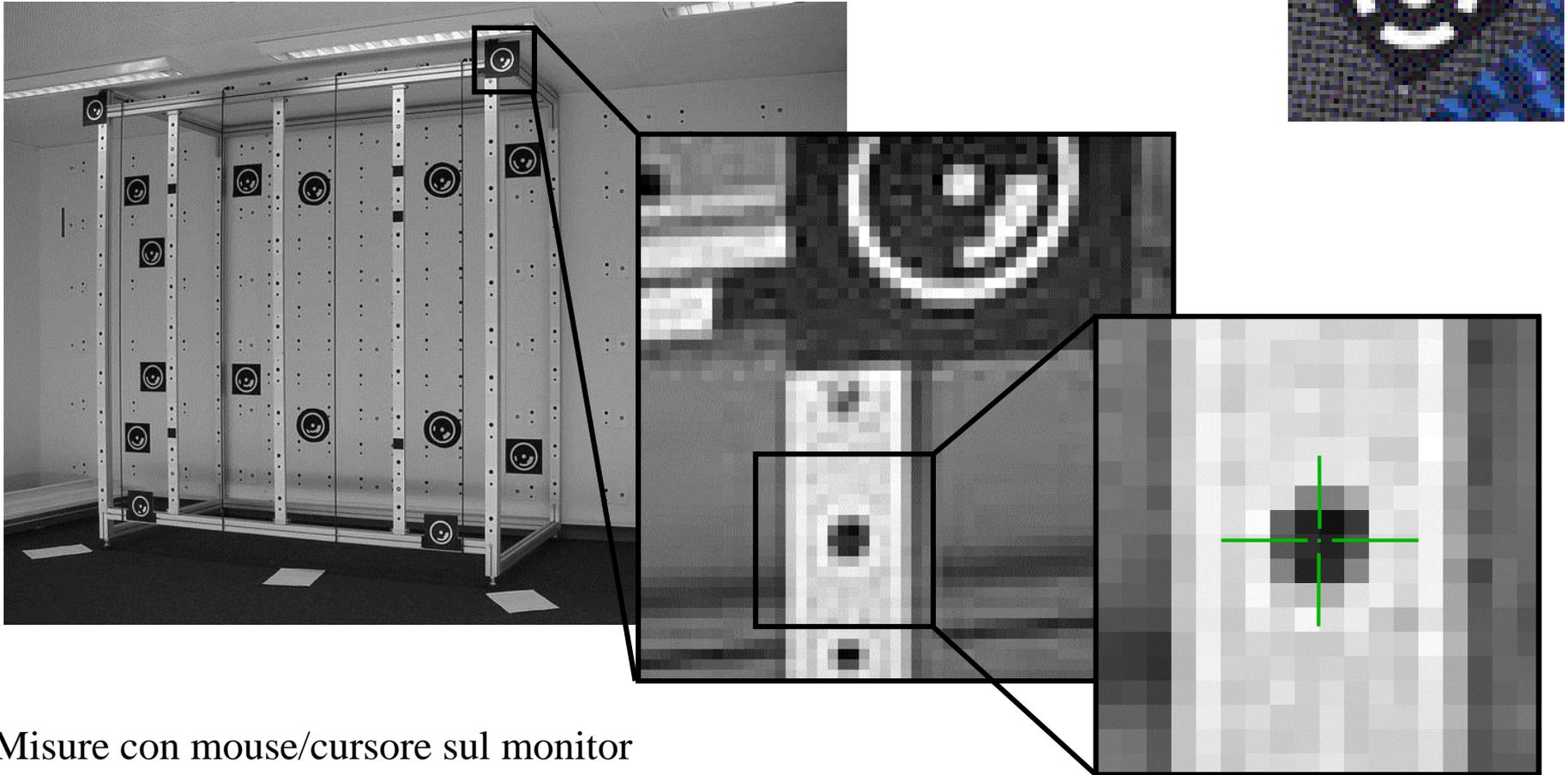
Wand itself can give a preferential reference system (and it can be used to recover the scale factor).



Misurazione manuale dei punti di controllo



Coded target



Misure con mouse/cursore sul monitor

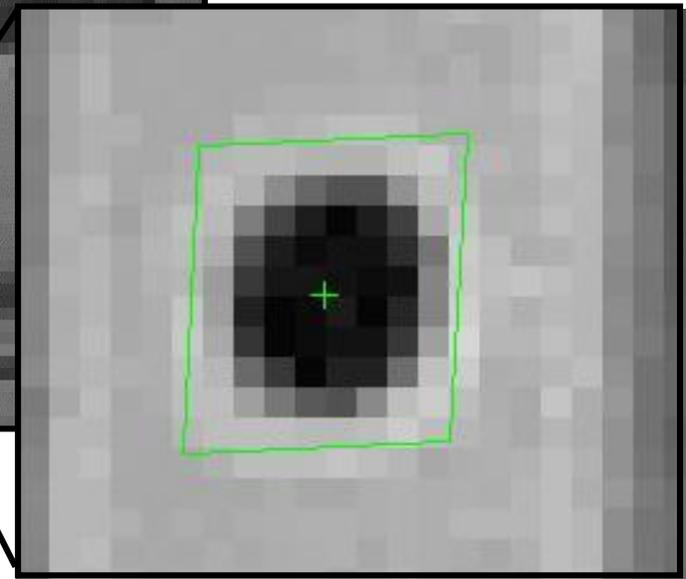
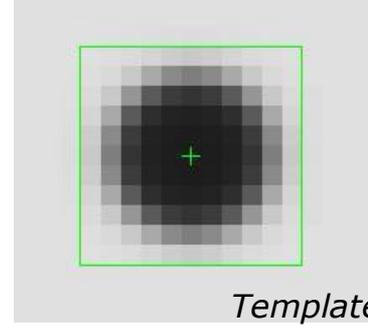
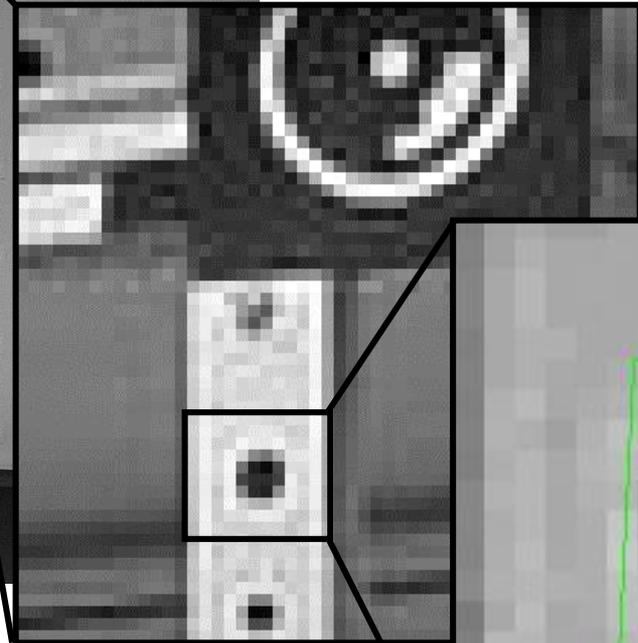
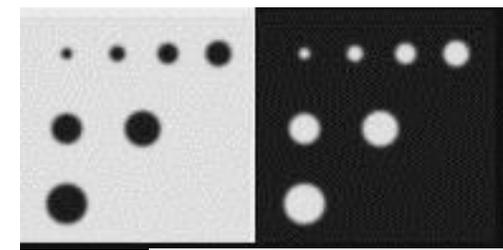
Precisione: $1/4 - 1/8$ Pixel



Misurazione automatica dei control points



Template Matching (least square, cross-correlazione)



Calcolo il coefficiente di correlazione piu' alto all'interno di una finestra di ricerca

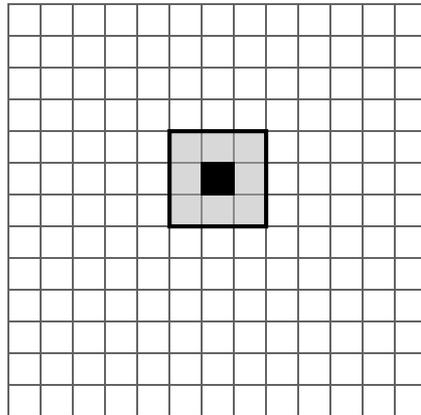
$$\gamma(x, y) = \frac{\sigma_{LR}}{\sigma_L \sigma_R}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)^2}{mn-1}}$$

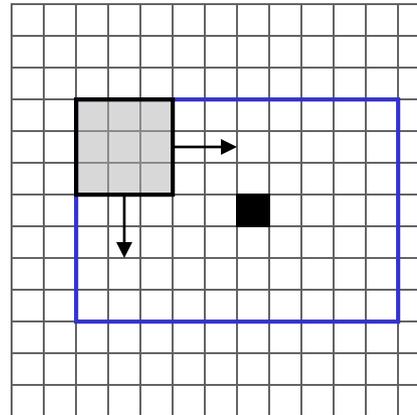
$$\sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R)^2}{mn-1}}$$

$$\sigma_{LR} = \frac{\sum_i \sum_j ((g_L(x_i, y_j) - \bar{g}_L)(g_R(x_i, y_j) - \bar{g}_R))}{nm-1}$$

finestra di correlazione



finestra di ricerca

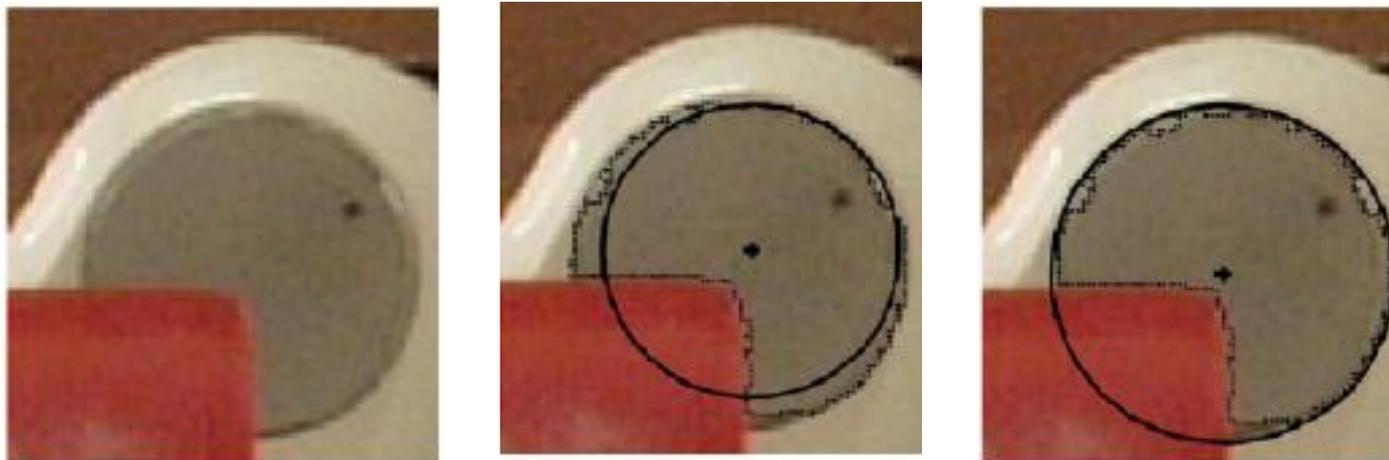


■ Conjugate pixels



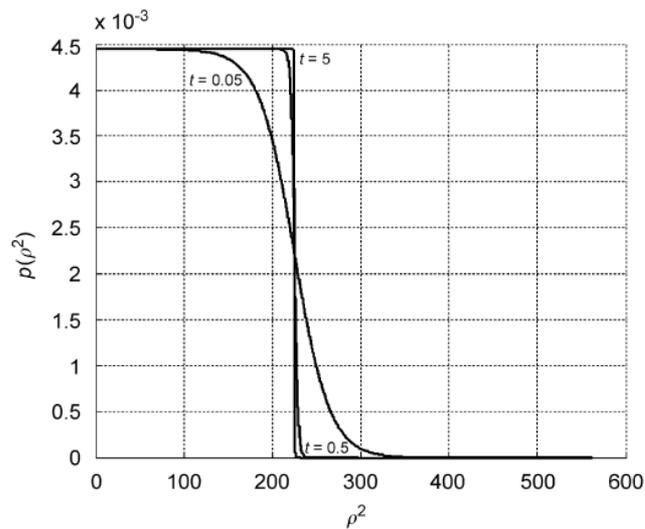
Search window

Approccio statistico al circle fitting



Frosio, Borghese – Pattern Recognition - 2008

$$L(\mathbf{p}_C, R_C) = \prod_{i=1}^N p(\rho_i^2, R_C).$$





Approssimazione mediante DLT



Collinearita':

$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

DLT:
(*Direct Linear Transform*).

$$x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} + 1}$$

$$y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} + 1}$$

I parametri esterni ed interni sono rappresentati con gli 11 coefficienti L_i



DLT ed equazioni di collinearità



$$L_1 = \frac{x_0 \cdot r_{31} - f_x \cdot r_{11}}{D}; \quad L_2 = \frac{x_0 \cdot r_{32} - f_x \cdot r_{12}}{D}; \quad L_3 = \frac{x_0 \cdot r_{33} - f_x \cdot r_{13}}{D};$$

$$L_4 = \frac{x_0 + f_x (r_{11} X_0 + r_{12} Y_0 + r_{13} Z_0)}{D};$$

$$L_5 = \frac{y_0 \cdot r_{31} - f_y \cdot r_{21}}{D}; \quad L_6 = \frac{y_0 \cdot r_{32} - f_y \cdot r_{22}}{D}; \quad L_7 = \frac{y_0 \cdot r_{33} - f_y \cdot r_{23}}{D};$$

$$L_8 = \frac{y_0 + f_y \cdot (r_{21} \cdot X_0 + r_{22} \cdot Y_0 + r_{23} \cdot Z_0)}{D};$$

$$L_9 = \frac{r_{31}}{D}; \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}; \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D};$$

$$D = -(r_{31} \cdot X_0 + r_{32} \cdot Y_0 + r_{33} \cdot Z_0)$$

11 PARAMETRI da trovare =>

Richiede **almeno 6 control points** di **coordinate note**

-> stima ai minimi quadrati non iterativa

Trovati gli 11 parametri L_i , ricavo i parametri interni ed esterni, che utilizzo come approssimazione iniziale per il bundle adjustment



Calibrazione con punti in posizione nota



- Pattern (3D) di punti in posizione nota (test field).
- Misurazione dei punti.
- Determinazione dei parametri.

Per ciascun punto ho 2 equazioni di collinearità.
Ho $9 + D$ parametri aggiuntivi.

Ho bisogno di $(9 + D) / 2$ punti di controllo.



Bundle adjustment



Inizializzazione

Correzione dei parametri in modo tale che il fascio di rette passante per i punti di controllo e il centro di proiezione vada a coincidere con i punti proiettati.

Procedura iterative.

Analisi della qualità della soluzione (correlazione tra le variabili / stima dell'errore sui parametri)



Inizializzazione dei parametri



Soluzione determinata con Bundle Adjustment.

=> linearizzazione delle equazioni collinearita'

=> **approssimazioni iniziali** delle incognite

Interior parameters: Focal length, f , Principal point (x_o, y_o) .

Exterior parameters: Orientation (ω, ϕ, κ) and Position (X_o, Y_o, Z_o) .

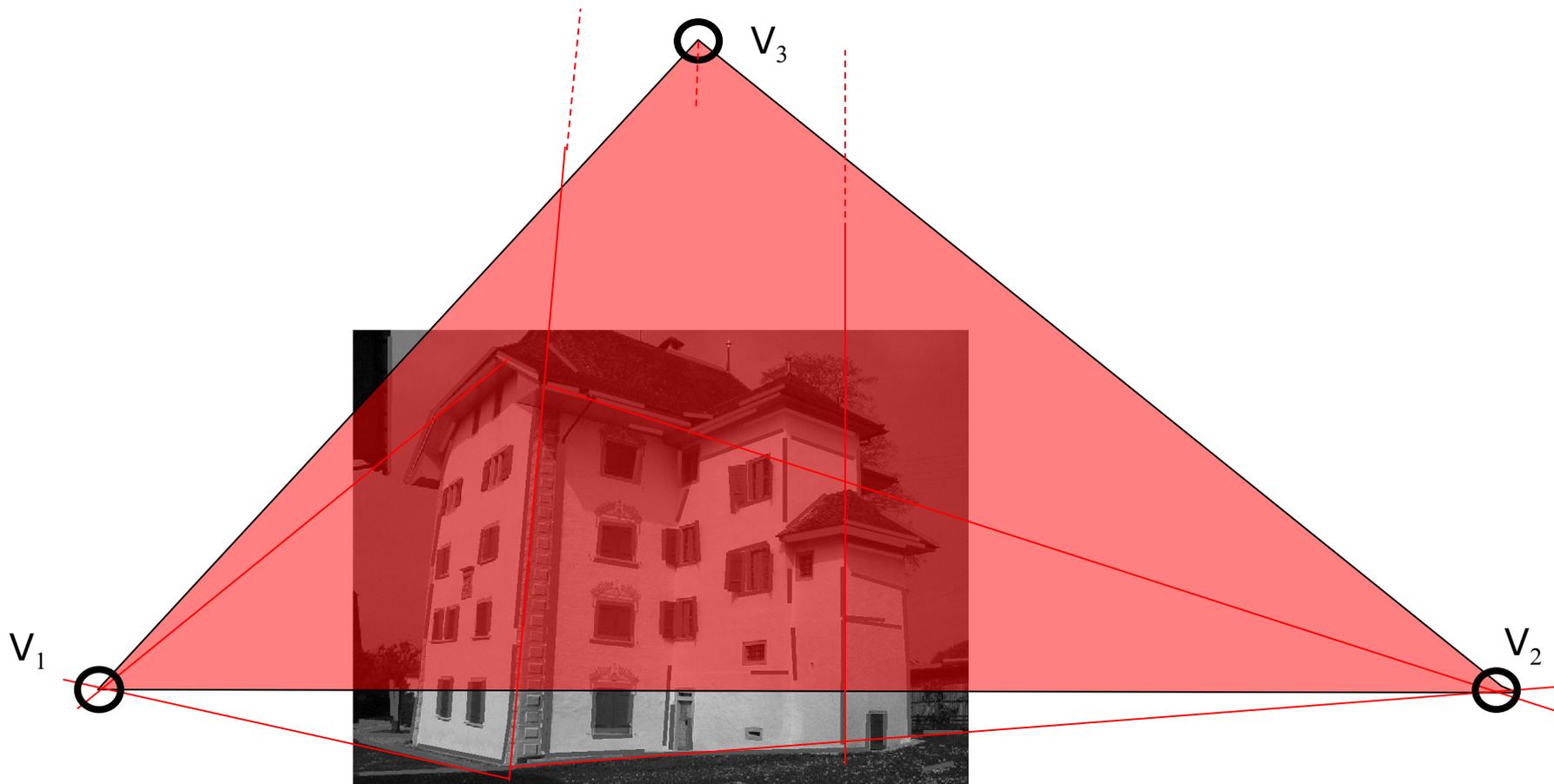
Distortion parameters: $g_1, g_2, g_3, g_4, k_1, \dots$

Inizialization with distortion parameters set equal to 0.

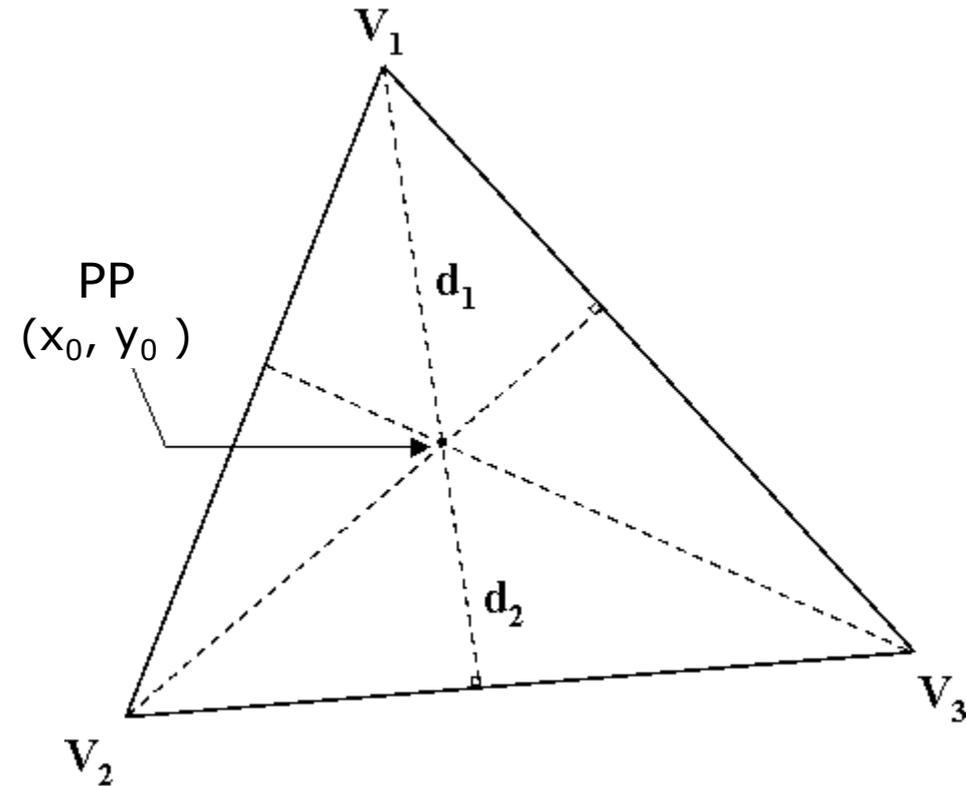


Inizializzazione dei parametri interni tramite vanishing points

Intersezione di linee parallele nello spazio 'oggetto' trasformate nello spazio 'immagine' da una trasformazione prospettiva della camera.



Stima del punto principale



PP: ortocentro del triangolo

$$c = \sqrt{d_1 * d_2}$$

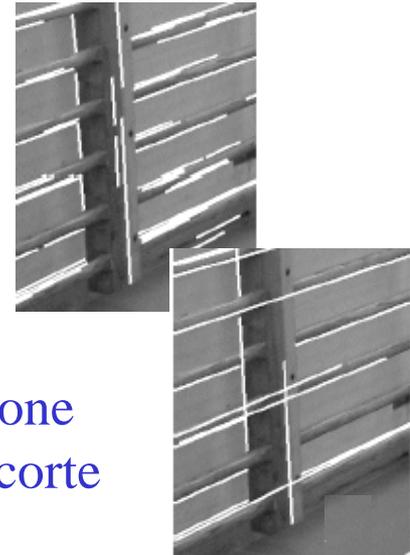
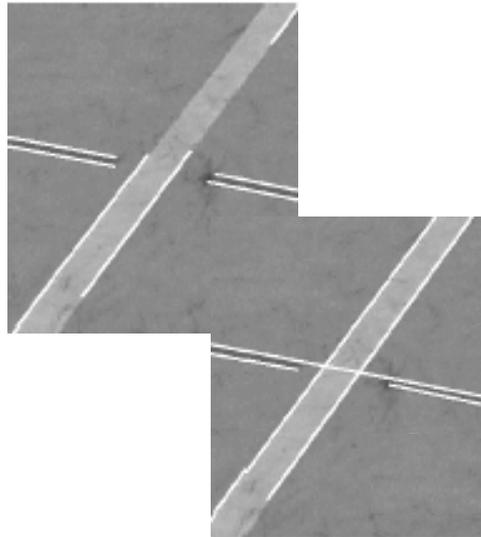
Problemi:

- Quali linee estrarre?
- Come trovarle (autom/manual)?
- Come trovare i 3 vertici del triangolo?



Algoritmo per determinare i vanishing points

- Estrazione automatica di edges/linee con operatore di Canny.
- Aggregazione delle linee piu' corte usando la loro pendenza e distanza reciproca.
- Per ogni linea, calcolare pendenza e distanza dal centro dell'immagine.
- Plottare pendenza e distanza.
- Classificazione delle linee in 3 gruppi (di solito $<40^\circ$; ca 90° ; $>140^\circ$).
- Intersezione delle linee di ciascun gruppo per calcolare il punto all'infinito (pto di fuga).
- Calcolo di PP e focale.



Aggregazione
delle linee corte



La calibrazione come problema di stima



$$x - x_o + f(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y - y_o + g(x, y, x_o, y_o) = -f \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$\mathbf{x} = F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \mid \mathbf{X}_C, \mathbf{Y}_C, \mathbf{Z}_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\})$$

$$\mathbf{y} = G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \mid \mathbf{X}_C, \mathbf{Y}_C, \mathbf{Z}_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})$$

Dati:

I punti nello spazio 3D: $\{X, Y, Z\}$

I punti misurati sul piano immagine $\{x, y\}$

Dobbiamo determinare:

I parametri $\{ \mathbf{X}_C, \mathbf{Y}_C, \mathbf{Z}_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\} \}$

Cosa serve?



Impostazione della Calibrazione



$$\begin{aligned}x &= F(X, Y, Z \mid X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) \\y &= G(X, Y, Z \mid X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\})\end{aligned}$$

- Per ogni punto immagine (x,y) ho 2 equazioni di collinearita'
- Combinando le equazioni per M punti di controllo ho un sistema di 2M equazioni non-lineari.

INPUT:

- coordinate 2D di punti misurati sulle immagini
- coordinate 3D dei punti di controllo.

OUTPUT (incognite):

- parametri d'orientamento interno e esterno
- parametri aggiuntivi (AP)



Visione statistica della determinazione dei parametri

x - $F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) = e_x$

y - $G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) = e_y$

Osservazioni

Modello

$$e_x = e_x^s + e_x^r$$

$$e_y = e_y^s + e_y^r$$

Errore randomico
(di misura)

Errore
totale

Errore sistematico
(di modellazione)

Minimizzo $e_x^2 + e_y^2$
Minimo per $e_x^s = e_y^s = 0$.



Minimizzazione dell'errore



$$x - F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) = e_x$$

$$y - G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) = e_y$$

Minimizzo $e_x^2 + e_y^2$

Minimizzo la differenza tra le osservazioni misurate ed i valori predetti dal modello per uno stesso punto (X, Y, Z).

Minimizzo

$$(x - F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}))^2 + (y - G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}))^2$$

rispetto a che cosa?



Visione geometrica della determinazione dei parametri (**bundle adjustment**)

Minimizzo

$$\begin{aligned} (x &- F(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}))^2 + \\ (y &- G(X, Y, Z | X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}))^2 \end{aligned}$$

Misure

Proiezione prospettica

Regolazione dei parametri che determinano il fascio di rette retro-proiettate sul piano immagine attraverso il centro di proiezione.

Bundle-adjustment. Minimizzazione dell'errore di retro-proiezione.

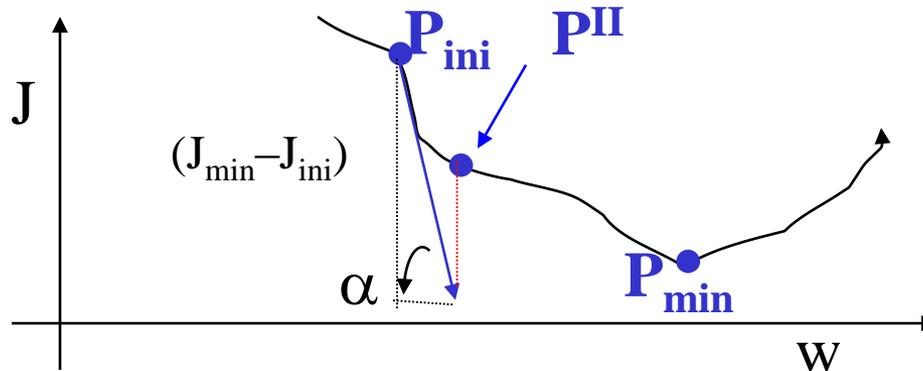


Minimizzazione tramite gradiente



Minimizzo $J(\cdot)$ rispetto ai parametri.

Tecnica del gradiente applicata alla minimizzazione di funzioni non-lineari di **una variabile**: $J = J(w|\dots)$.



La derivata, mi dà due informazioni:

- 1) In quale direzione di w , la funzione decresce.
- 2) Quanto rapidamente decresce.

Definisco uno spostamento arbitrario lungo la pendenza: maggiore la pendenza maggiore lo spostamento. Mi muovo lungo la direzione della pendenza, arrivo in P^{II} . Calcolo $J(w^{\text{II}})$.

Da qui riparto fino a quando non arrivo in P_{min} .



Minimizzazione di funzioni di più variabili



$\min(J\{\mathbf{w}\} | \dots)$ funzione costo od errore

Gradiente:

$$\frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_1} \frac{w_1}{|w_1|} + \frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_2} \frac{w_2}{|w_2|} +$$

$$\frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_3} \frac{w_3}{|w_3|} + \frac{\partial J(\{w\} | \dots)}{\partial w_4} \frac{w_4}{|w_4|} + \dots$$

Modifico il valore dei pesi di una quantità proporzionale alla pendenza della funzione costo rispetto a quel parametro.

Estensione della tecnica del gradiente a più variabili.

Serve un' **approssimazione iniziale** per i pesi $W_{ini} = \{w_j\}_{ini}$.



Minimizzazione tramite gradiente nel bundle adjustment



$$(\mathbf{x} - F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \mid \mathbf{X}_C, \mathbf{Y}_C, \mathbf{Z}_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, \mathbf{x}_0, \{ap_x\}))$$

È la mia funzione da ottimizzare. Ne faccio lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine:

$$\mathbf{x} - = F(\cdot | \mathbf{W}) + \sum_{j=1}^W \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial w_j} \Big|_t * dw_j + \dots$$

= 0

Da qui ricavo un sistema lineare da cui ricavo i dw_j



Esempio di applicazione tecnica del gradiente per funzioni di 1 variabile



Supponiamo che il modello da noi considerato sia semplice: $y = ax^2$

Consideriamo di avere stimato $a = 2$ e di avere misurato $y = 3$ per $x = 1$. Possiamo modificare il parametro a in modo tale che il modello fitta i dati ($x=1$ e $y =3$).

Linearizziamo il modello e scriviamo: $(y - ax^2) -$

$$\left[\frac{d}{da} (ax^2) \right] da$$

Sostituendo i valori otteniamo:

$$a = 2 + 1/4 = 2.25.$$

$$a = 2.25 + 0.166 = 2.415.$$

$$a = 2.415 + 0.11 = 2.52.$$

$$da = (3 - 2 \cdot 1) / (2 \cdot 2 \cdot 1) = 1/4$$

$$da = (3 - 2.25 \cdot 1) / 4.5 = 1/6$$

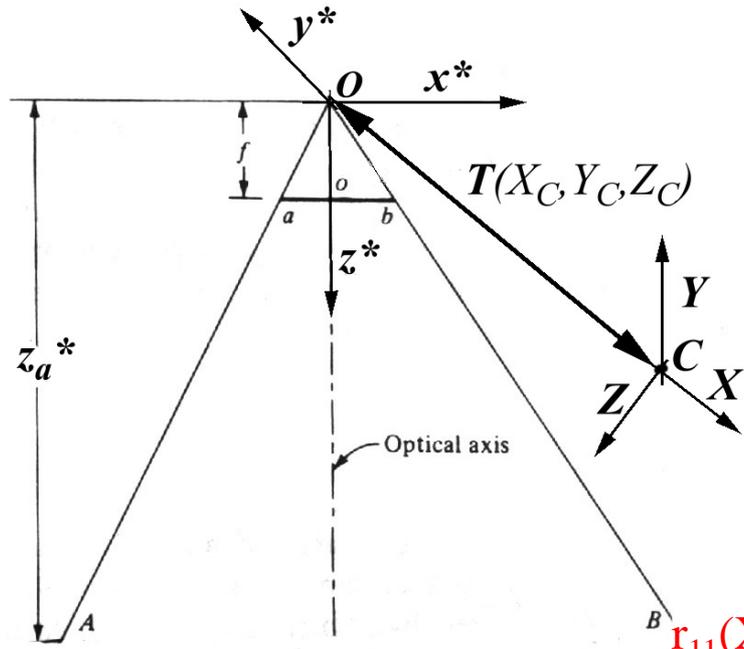
$$da = -(3 - 2.42 \cdot 1) / 4.84 = 0.11$$

$$da = -(3 - 2.52 \cdot 1) / 5.04 = 0.1 \dots$$

Avendo più di una misurazione dobbiamo “mediare” tra gli incrementi dx calcolati per ogni misurazione.



Equazioni di collinearità



$$x_m = F(P(X, Y, Z) | \{w\})$$

$$y_m = G(P(X, Y, Z) | \{w\})$$

$$x_m - x_o = x_A \frac{f}{z_A} = f \frac{r_{11}(X_A - X_O) + r_{12}(Y_A - Y_O) + r_{13}(Z_A - Z_O)}{r_{31}(X_A - X_O) + r_{32}(Y_A - Y_O) + r_{33}(Z_A - Z_O)}$$

$$y_m - y_o = y_A \frac{f}{z_A} = f \frac{r_{21}(X_A - X_O) + r_{22}(Y_A - Y_O) + r_{23}(Z_A - Z_O)}{r_{31}(X_A - X_O) + r_{32}(Y_A - Y_O) + r_{33}(Z_A - Z_O)}$$



Minimizzazione dei residui (problema di minimo non lineare)



$$\min(\mathbf{x} - F(P(X,Y,Z)|\{\mathbf{w}\}))^2 + (\mathbf{y} - G(P(X,Y,Z)|\{\mathbf{w}\}))^2 = \min(F^* + G^*)$$

F^* , G^* sono i residui delle equazioni di collinearità

Il minimo della funzione $F^*|G^*$ sarà $\neq 0$ (errore di modellazione + errore di misura).

Linearizzazione (sviluppo di Taylor del primo ordine)

$$F^*(t+1) = F^*(t) + \sum_{j=1}^W \left. \frac{\partial F^*(.)}{\partial w_j} \right|_t * dw_j$$

$$G^*(t+1) = G^*(t) + \sum_{j=1}^W \left. \frac{\partial G^*(.)}{\partial w_j} \right|_t * dw_j$$



Risoluzione della Calibrazione



Equazioni non-
lineari.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \mid X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, \{ap_x\}) \\ \mathbf{y} &= G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \mid X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, y_o, \{ap_y\}) \end{aligned}$$

Definisco $W = [X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_o, y_o, \{ap_x\}, \{ap_y\}]$

STRATEGIA DI SOLUZIONE: stima ai minimi quadrati iterativa.

Parti da un valore iniziale dei parametri.

Ripeti:

A) Determinazione dell'errore di retro-proiezione con il set di parametri corrente.

B) Linearizza le equazioni di collinearità per il punto P_k ed i parametri $\{W^t\}$.

C) Determina un valore incrementale delle incognite che migliora la soluzione, cioè diminuisce l'errore di retro-proiezione ($W^{t+1} = W^t + dW^t$)

Fino a quando l'incremento dei parametri non diventa trascurabile. $dW^t \cong 0$



A) Determinazione dell'errore di retro-proiezione (residuo)

Per ogni punto, $[p_k(x_k, y_k) P_k(X_k, Y_k, Z_k)]$,

Dato un certo insieme di parametri:

$$W^t = [X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, y_o^t, \{ap_x^t\}, \{ap_y^t\}]$$

$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}))$$

$$(y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}))$$

Definisco residuo o errore di retro-proiezione la quantità $[v_{xk}, v_{yk}]$:

$$v_{xk} = F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}) - x_k$$

$$v_{yk} = G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}) - y_k$$

NB Il residuo contiene sia l'errore di modellazione che l'errore di misura. Se i parametri sono quelli "reali", il residuo sarà uguale solo all'errore di misura.



B) Linearizzazione della funzione da minimizzare (errore di retro-proiezione, o residui)

Per ogni punto, $[p_k(x_k, y_k) P_k(X_k, Y_k, Z_k)]$,

Dato un certo insieme di parametri:

$$W^t = [X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, y_o^t, \{ap_x^t\}, \{ap_y^t\}]$$

$$F^* = (x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\}))^2 +$$

$$G^* = (y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, y_o^t, \{ap_y^t\}))^2$$

$$(x_k - F(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\})) +$$

$$\frac{\partial F^* ()}{\partial X_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \frac{\partial F^* ()}{\partial Y_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \frac{\partial F^* ()}{\partial Z_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \frac{\partial F^* ()}{\partial \omega_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} d\omega + \dots$$

$$(y_k - G(X_k, Y_k, Z_k | X_C^t, Y_C^t, Z_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, x_o^t, \{ap_x^t\})) +$$

$$\frac{\partial G^* ()}{\partial X_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \frac{\partial G^* ()}{\partial Y_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \frac{\partial G^* ()}{\partial Z_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \frac{\partial G^* ()}{\partial \omega_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} d\omega + \dots$$



B) Sviluppo in serie di Taylor (forma matriciale)

$$(\mathbf{x}_k - F(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_C^t, \mathbf{Y}_C^t, \mathbf{Z}_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, \mathbf{x}_o^t, \{ap_x^t\})) +$$
$$\left. \frac{\partial F^* ()}{\partial X_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \left. \frac{\partial F^* ()}{\partial Y_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \left. \frac{\partial F^* ()}{\partial Z_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \left. \frac{\partial F^* ()}{\partial \omega_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} d\omega + \dots$$

$$(\mathbf{y}_k - F(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_C^t, \mathbf{Y}_C^t, \mathbf{Z}_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, \mathbf{x}_o^t, \{ap_x^t\})) +$$
$$\left. \frac{\partial G^* ()}{\partial X_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \left. \frac{\partial G^* ()}{\partial Y_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \left. \frac{\partial G^* ()}{\partial Z_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \left. \frac{\partial G^* ()}{\partial \omega_o} \right|_{W^t | P_k | P_k} d\omega + \dots$$

A x = b

M punti e N parametri di calibrazione.

A (2*m x n) - Matrice di disegno (contiene le derivate **parziali**).

x (n) – Vettore delle incognite (gli incrementi dei parametri di calibrazione).

b (2*m) – Residuo o errore di retro-proiezione.



Determina l'incremento dei parametri



$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}_k - F(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k \mid \mathbf{X}_C^t, \mathbf{Y}_C^t, \mathbf{Z}_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, \mathbf{x}_o^t, \{ap_x^t\})) + \\
 \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial X_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Y_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial Z_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \frac{\partial F^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} d\omega + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{y}_k - F(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k \mid \mathbf{X}_C^t, \mathbf{Y}_C^t, \mathbf{Z}_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, \mathbf{x}_o^t, \{ap_x^t\})) + \\
 \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial X_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dX_o + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Y_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dY_o + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial Z_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} dZ_o + \frac{\partial G^*(\cdot)}{\partial \omega_o} \Big|_{W^t | P_k | P_k} d\omega + \dots
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Stima ai minimi quadrati.

$$\mathbf{A}'^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}'^* \mathbf{b}$$



$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}'^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'^* \mathbf{b}$$



Condizionamento della matrice $C = A'^*A$

c_{ij} – contiene la somma dei prodotti delle derivate della funzione proiettiva rispetto al parametro i e j calcolate per tutti i punti.

Per evitare di ottenere elementi troppo grandi che rendono la norma della matrice C vicina alla precisione della macchina, si preferisce utilizzare la Singular Value Decomposition per risolvere il sistema lineare.

$$A x = b \rightarrow [U \ W \ V]x = b \rightarrow U'U \ W \ Vx = U'b \rightarrow Vx = W^{-1}U'b$$

Matrice diagonale

$n \times n$

Matrice ortonormale

$n \times n$

$$x = V'W^{-1}U'b$$

- La matrice C non viene formata.
- W^{-1} contiene i reciproci degli elementi di W .

Matrice ortonormale

$2^*m \times n$



Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti

$$x = (A'^*A)^{-1}A'^* b$$

$$x = V'W^{-1}U'b$$

Se A è rank-deficient, A'^*A è singolare.

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice W .

In questo caso il problema è sovrapparametrizzato.



Valutazione della bontà della stima



$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}' * \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' * \mathbf{b}$$

Definisco residuo o errore di retro-proiezione la quantità $[v_{xk}, v_{yk}]$:

$$v_{xk} = F(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_C^t, \mathbf{Y}_C^t, \mathbf{Z}_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, \mathbf{x}_o^t, \{\mathbf{ap}_x^t\}) - \mathbf{x}_k$$

$$v_{yk} = G(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k, \mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_C^t, \mathbf{Y}_C^t, \mathbf{Z}_C^t, m_{ij}^t(\omega, \phi, k), f^t, \mathbf{y}_o^t, \{\mathbf{ap}_y^t\}) - \mathbf{y}_k$$

Errore di misura Gaussiano a media nulla $e(0, \sigma^2)$

$$\langle v_{xk} \rangle = \langle v_{yk} \rangle = 0$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \sum_{m=1}^M (v_{x_m}^2 + v_{y_m}^2)$$

Errore di retro-proiezione = rumore di misura.



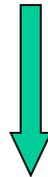
Valutazione della bontà della stima del singolo parametro e della loro correlazione

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}'^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'^* \mathbf{b} \qquad \hat{\sigma}_0^2 = \sum_{m=1}^M \left(v_{x_m}^2 + v_{y_m}^2 \right)$$

$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}'^* \mathbf{b}$ \mathbf{C}^{-1} è chiamata anche matrice di covarianza.

Chiamiamo \mathbf{u} e \mathbf{v} le variabili casuali associate all'errore sui **parametri** e all'errore di **retro-proiezione**, rispettivamente. Si suppone errore a media nulla e Gaussianamente distribuito.

$$\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}'^* (\mathbf{b} + \mathbf{v})$$



$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}'^* \mathbf{v}$$



Impostazione del calcolo della correlazione tra i parametri

$$u = C^{-1}A'v$$

Vogliamo individuare la correlazione tra due parametri r ed s. Devo quindi determinare il valore atteso di $u_r * u_s$.

$$\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_W \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_W \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_Wu_1 & u_Wu_2 & \dots & u_W^2 \end{bmatrix}$$

$$u = C^{-1}A'v \quad \Rightarrow \quad u' = v'A(C^{-1})'$$

$uu' = C^{-1}A'vv'A(C^{-1})' \Rightarrow$ Applicando l'operatore di media, si ottiene:

$$\langle uu' \rangle = C^{-1}A' \langle vv' \rangle A(C^{-1})'$$

Dato che v sono i residui, e sono indipendenti, e tutte i punti di controllo hanno lo stesso tipo di errore di misura, si avrà che $\langle vv' \rangle = I\sigma_0^2$.



Calcolo della correlazione tra i parametri

$$\langle uu' \rangle = C^{-1} A' I A (C^{-1})' \sigma_0^2 = C^{-1} \sigma_0^2$$

Da cui si giustifica il nome di matrice di covarianza per C^{-1} .

Segue che: $\sigma^2(u_{ij}) = c_{ij}^{-1} \sigma_0^2$ Varianza sulla stima del parametro.

Esempi di correlazione elevata:

$f \leftrightarrow Z, Z_0$

$x_0, y_0 \leftrightarrow X, Y, X_0, Y_0$

$$-1 \leq r_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\sqrt{\langle u_i \rangle^2 \langle u_j \rangle^2}} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_i c_j}} \leq +1$$

Indice di correlazione tra il parametro i ed il parametro j

(empiricamente si scartano parametri quando la correlazione è superiore al 95%)

Vanno rapportati alle dimensioni dei parametri coinvolti.



Proprietà del bundle-adjustment



Con punti di controllo di coordinate note può essere utilizzato per calibrare una fotocamera.

Nella calibrazione di più fotocamere che guardano lo stesso pattern di calibrazione, si possono inserire anche punti di coordinate non note (deve valere la relazione:

$$2*(M+ K)*N \geq 3*K + N * (9 + AP)$$

N – numero di video-camere.

M – numero di punti di controllo di coordinate note.

K – numero di punti di controllo di coordinate non-note.

AP – parametri addizionali.

Esempio: 3 video camere, 4 parametri addizionali. $\rightarrow 2M + K \geq 13$.

Diverse combinazioni di punti di controllo (posizione nota e non nota).



Attenzioni nella calibrazione



- At least over two planes (to minimize the impact of the correlation between Z_0 and c).
- Good coverage of the working volume (extrapolation fails): good distribution of the control points over each image, and of the images inside the working volume.
- Extract good features from the images (weighting of the observations may apply).
- Analysis of the geometrical model parameterization (weak-perspective or paraperspective instead of perspective projection).
- Analysis of the adequacy of the distortion model parameterization (number of distortion parameters).



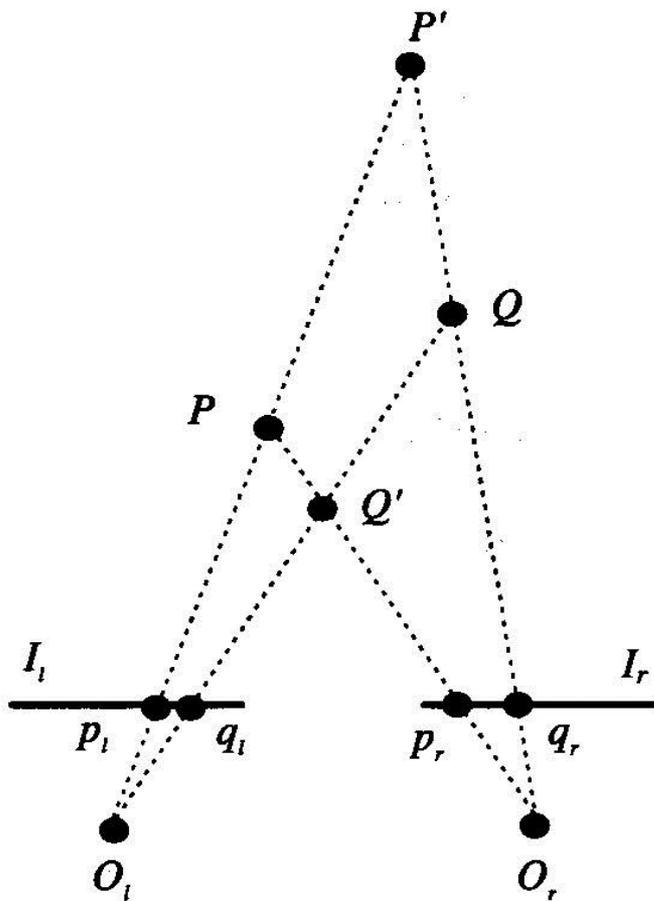
Sommario



- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione
- Ricostruzione 3D

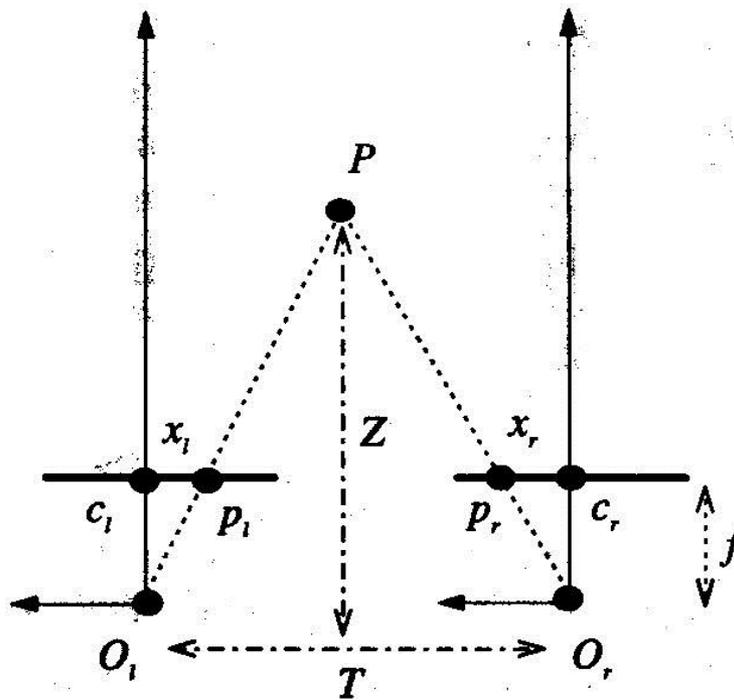
3D basato su stereo-disparità

- $O_1 - O_r = \text{baseline}$
- $x_1 - x_r = \text{stereo disparità}$



(a)

$$T / Z = d / f$$



(b)

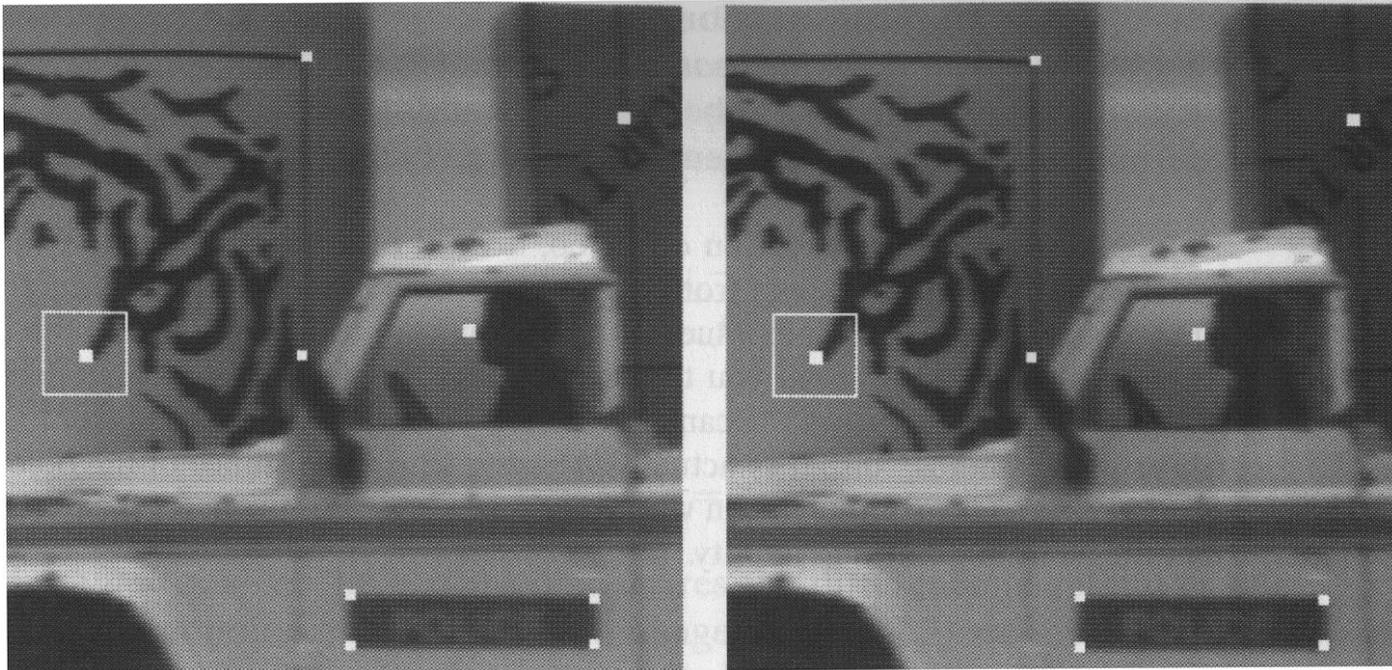


Problemi

- Corrispondenza.
- Ricostruzione posizione 3D.
- Classificazione.

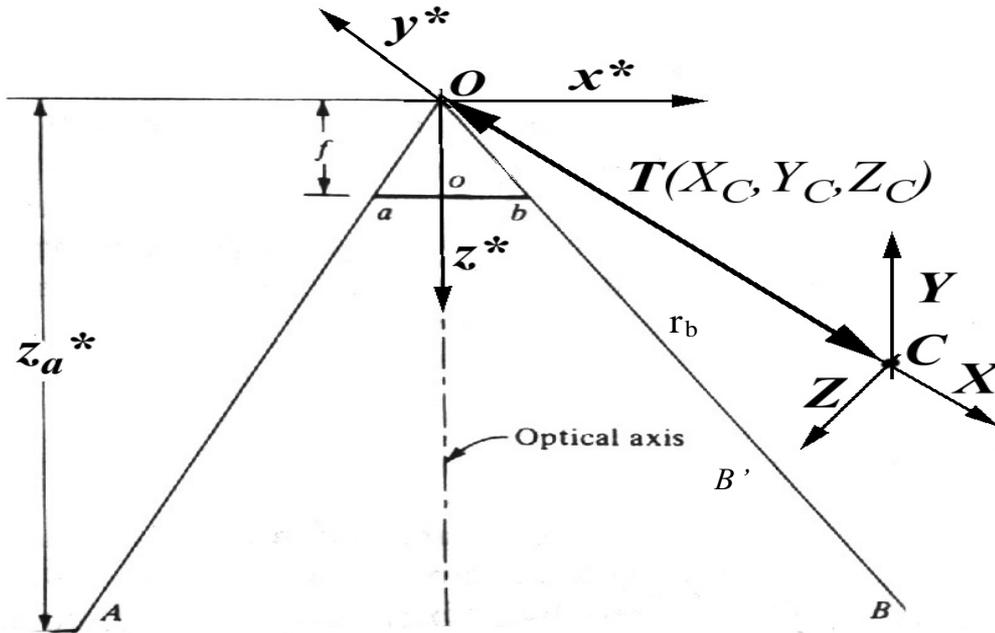
Low-level processing

High-level processing





Dal 2D al 3D



Invertiamo le
Equazioni di collinearità
 $P(X, Y, Z) \Rightarrow p(x, y, f)$

 $p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$

$$x_a = x_o + f * \frac{m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$y_a = y_o + f * \frac{m_{21}(X - X_C) + m_{22}(Y - Y_C) + m_{23}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$z_a = f$$



Dal 2D al 3D



- Equazioni inverse $p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$

$$[m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)] * (x_a - x_o) = f[m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)]$$

$$[m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)] * (y_a - y_o) = f[m_{21}(X - X_C) + m_{22}(Y - Y_C) + m_{23}(Z - Z_C)]$$

Sono equazioni lineari in X, Y, Z:

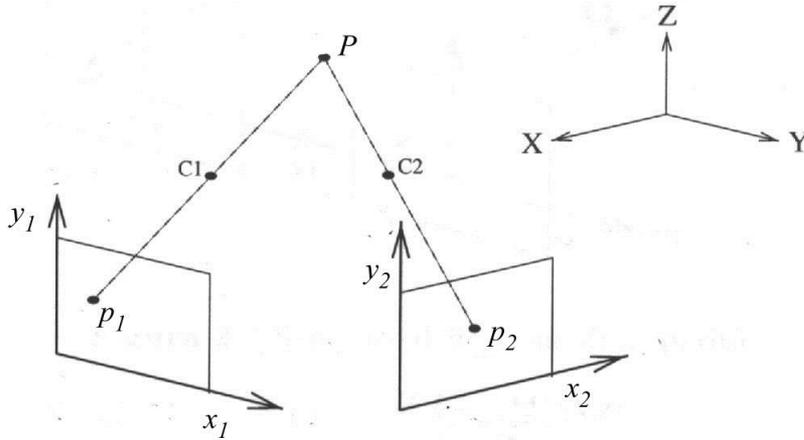
- $[m_{31}(x_a - x_o) - fm_{11}] \mathbf{X} + [m_{32}(x_a - x_o) - fm_{12}] \mathbf{Y} + [m_{33}(x_a - x_o) - fm_{13}] \mathbf{Z} = [m_{31}(x_a - x_o) - fm_{11}] X_C + [m_{32}(x_a - x_o) - fm_{12}] Y_C + [m_{33}(x_a - x_o) - fm_{13}] Z_C$
- $[m_{31}(y_a - y_o) - fm_{21}] \mathbf{X} + [m_{32}(y_a - y_o) - fm_{22}] \mathbf{Y} + [m_{33}(y_a - y_o) - fm_{23}] \mathbf{Z} = [m_{31}(y_a - y_o) - fm_{21}] X_C + [m_{32}(y_a - y_o) - fm_{22}] Y_C + [m_{33}(y_a - y_o) - fm_{23}] Z_C$

Identificano due piani:

- $a_1 \mathbf{X} + b_1 \mathbf{Y} + c_1 \mathbf{Z} = d_1$ // asse y
- $a_2 \mathbf{X} + b_2 \mathbf{Y} + c_2 \mathbf{Z} = d_2$ // asse x

Intersezione di due piani individua una retta nello spazio 3D (raggio della video-camera, camera ray). Retta per il punto sul piano immagine ed il centro di prospettiva.

Ricostruzione stereoscopica



$$\{p_1(x,y) \iff p_2(x,y)\}$$

$$[p_1(xy) \mid p_2(xy)] \Rightarrow P(XYZ).$$

Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Equazioni di collinearità per due video-camere:

$$\bullet a_{1TV1} \mathbf{X} + b_{1TV1} \mathbf{Y} + c_{1TV1} \mathbf{Z} = d_{1TV1}$$

$$\bullet a_{2TV1} \mathbf{X} + b_{2TV1} \mathbf{Y} + c_{2TV1} \mathbf{Z} = d_{2TV1}$$

$$\bullet a_{1TV2} \mathbf{X} + b_{1TV2} \mathbf{Y} + c_{1TV2} \mathbf{Z} = d_{1TV2}$$

$$\bullet a_{2TV2} \mathbf{X} + b_{2TV2} \mathbf{Y} + c_{2TV2} \mathbf{Z} = d_{2TV2}$$

Ricostruzione - matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{1TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{2TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{1TV2} & b_{1TV2} & c_{1TV2} \\ a_{2TV2} & b_{2TV2} & c_{2TV2} \end{bmatrix}$$

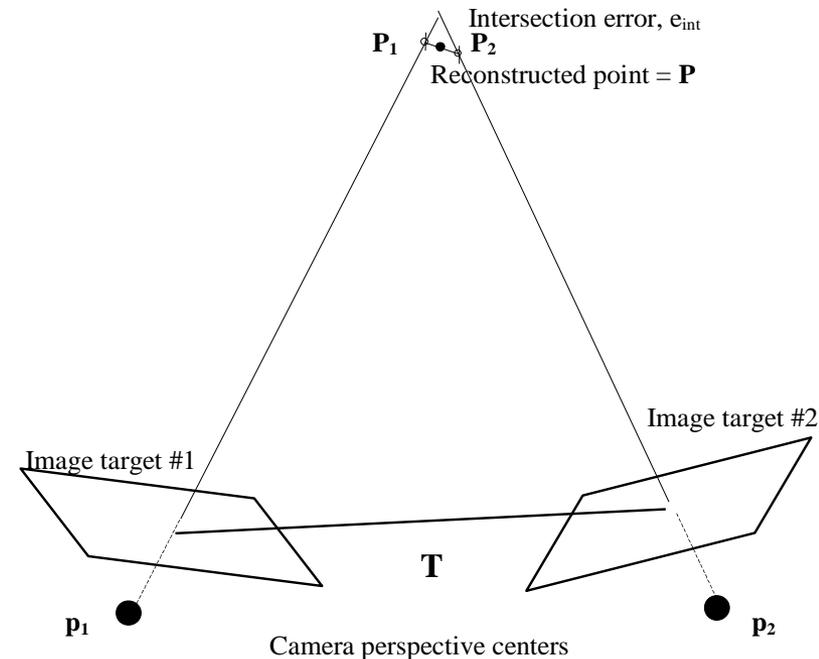
$$B = \begin{bmatrix} d_{1TV1} \\ d_{2TV1} \\ d_{1TV2} \\ d_{2TV2} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

In forma matriciale: $A P = B$

$\Rightarrow P = (A^T A)^{-1} A^T B$

- Effetto dell'errore di misura.
- Quando non ammette soluzioni?





Ricostruzione - Ray intersection

- *Altra soluzione*: equazioni in forma parametriche delle due rette:

$$X_1 = Xc_1 + a_1 k$$

$$X_2 = Xc_2 + a_2 h$$

$$Y_1 = Yc_1 + b_1 k$$

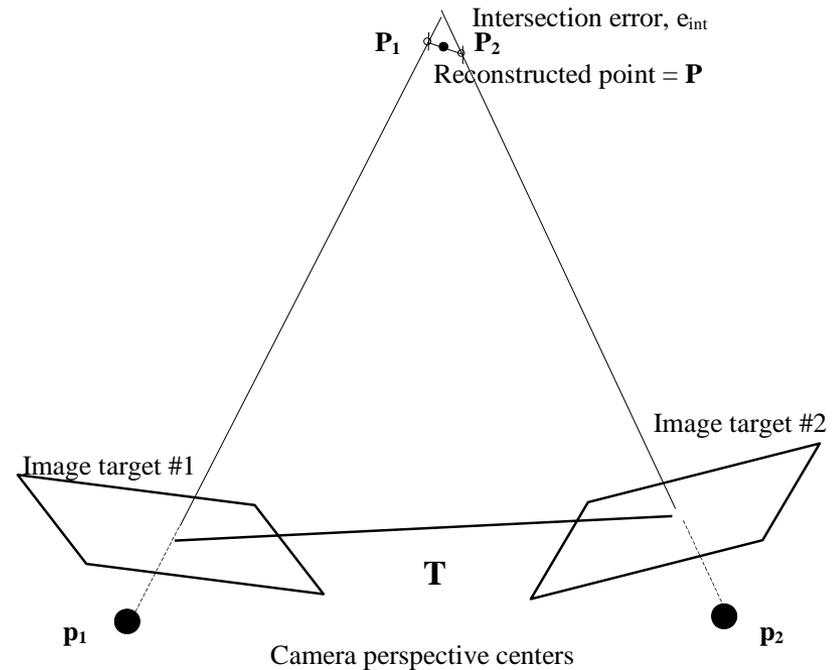
$$Y_2 = Yc_2 + b_2 h$$

$$Z_1 = Zc_1 + c_1 k$$

$$Z_2 = Zc_2 + c_2 h$$

$$\min_{h,k} [(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2]$$

- Calcolo della distanza (funzione dei due parametri, h e k);
- Minimizzazione (funzione dei due parametri).





Augmented reality at work





Sommario



- La trasformazione proiettiva
- Calibrazione
- Ricostruzione 3D