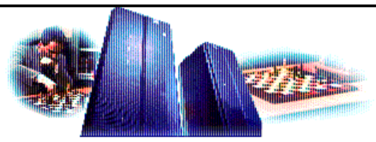
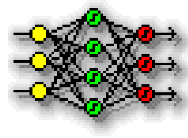




# Sistemi Intelligenti I fuzzy system

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
Dipartimento di Informatica
Alberto.borghese@unimi.it



# Overview

I fuzzy set

I fuzzy system

| $\theta'$ \ $\theta$ | NL | NM | NS | ZE | PS | PM | PL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NL | | | | PL | | | |
| NM | | | | PM | | | |
| NS | | | | PS | NS | | |
| ZE | PL | PM | PS | ZE | NS | NM | NL |
| PS | | | PS | NS | | | |
| PM | | | | NM | | | |
| PL | | | | NL | | | |

**B. Kosko, Neural Networks and Fuzzy Systems, Prentice Hall.**

# Incertezza

Le nostre misure, le nostre conoscenze sono affette da incertezza.

- Errore di misura
- Incertezza sulla classificazione
- Incertezza sull'evento che si e' verificato…..



# La logica classica

Logica a 2 valori: A = {T,F}.

La funzione verita' T: {proposizione} -> {0, 1}

definisce la logica classica e può essere implementata come tabella della verità: descrizione esaustiva del funzionamento della funzione per **tutti** i possibili (discreti) valori in ingresso.

T(A,B,C,D) => {True,False} nel caso di una funzione a più valori.

AND

| | A | B | Y |
|---|---|---|---|
| FF | 0 | 0 | 0 F |
| FV | 0 | 1 | 0 F |
| VF | 1 | 0 | 0 F |
| VV | 1 | 1 | 1 V |

OR

| | A | B | Y |
|---|---|---|---|
| FF | 0 | 0 | 0 F |
| FV | 0 | 1 | 0 F |
| VF | 1 | 0 | 0 F |
| VV | 1 | 1 | 1 V |

## Esempio funzione logica

Se c'è Michela
*e*
c'è il sole
*allora*
vado a sciare


Michela c'e'
Michela = True

Sole c'è
Sole = True

Vado a sciare = true

Michela non c'e'
Michela = False

Definisco "bene" le situazioni (e.g. partite a scacchi)



## La logica classica : proprietà

Logica a 2 valori: A = {T,F}.

Inoltre valgono le proprietà sull'insieme A:

$A \cap A^c = \emptyset$ (non contraddizione)

$A = T$ (True) $\Leftrightarrow$ $A^c = F$ (False). (terzo escluso)

Vero e falso sono valori distanti (per questo la logica classica è ben interpretata dai circuiti HW logici).

# Esempio "difficile"

Nuvoloso = Vero?

Se è nuvoloso

vado al cinema

Nuvoloso = Falso?

Quanto è nuvoloso?



# I Fuzzy set

Nella logica fuzzy, tutto è questione di **gradazione** (più o meno nuvoloso)

Dal punto di vista matematico, fuzzy e' equivalente ad una proposizione logica che può assumere un **numero infinito di valori tra vero e falso**.


La funzione verita' generalizzata T: {proposizione} -> **[0, 1]** definisce la logica fuzzy. Insieme infinito di valori compresi tra 0 e 1. Non ci si può ricondurre una tabella (della verità).

# La funzione verità fuzzy

La funzione verità generalizzata T: {proposizione} -> [0, 1] definisce la logica fuzzy.

$A \cap A^c \neq \emptyset$ Viene violata la legge di non contraddizione (il cielo può essere contemporaneamente nuvoloso e non nuvoloso).

$A \cup A^c \neq X$ Viene violata la legge del terzo escluso (oltre a cielo nuvoloso e non nuvoloso esistono altri valori: tutte le gradazione intermedie.

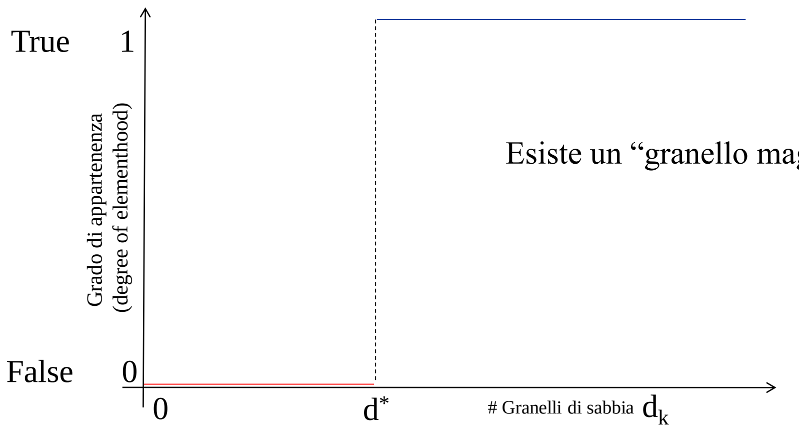


# Esempio di Fuzzy set

Costruiamo una montagnetta di granelli di sabbia.
La proposizione S(.) è l'affermazione: "è una montagnetta di sabbia" ed è funzione del numero di granelli, d.

Non esiste un particolare numero di granelli, d*, per cui $S_{d*} = F$ diventi $S_{d*+1} = T$.

# Esempio di funzione di appartenenza (logica classica)




Esiste un “granello magico”

S(d*) castello_false
S(d*) castello_true

Sono 2 proposizioni antitetiche.



# Montagnetta di sabbia e Fuzzy set

Supponendo di avere una montagnetta di n granelli di sabbia, se abbiamo 0 granelli di sabbia avremo: T(0) = 0.

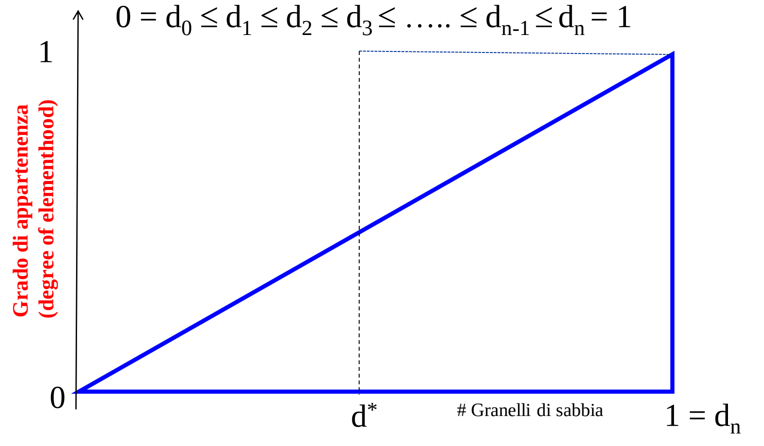
Possiamo mettere in relazione le diverse situazioni:
T(0) = false - $0 = d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \ldots.. \leq d_{n-1} \leq d_n$ - $T(d_n)$ = true

d esprime un margine di dubbio associato al numero di granelli. (cf. l’esperimento di Moravec: the prosthetic brain).

Nulla e’ detto ancora sulla forma della funzione che passa da 0 ad 1 nel caso fuzzy.

# Esempio di funzione di appartenenza (logica fuzzy)

$0 = d_0 \le d_1 \le d_2 \le d_3 \le \ldots.. \le d_{n-1} \le d_n = 1$

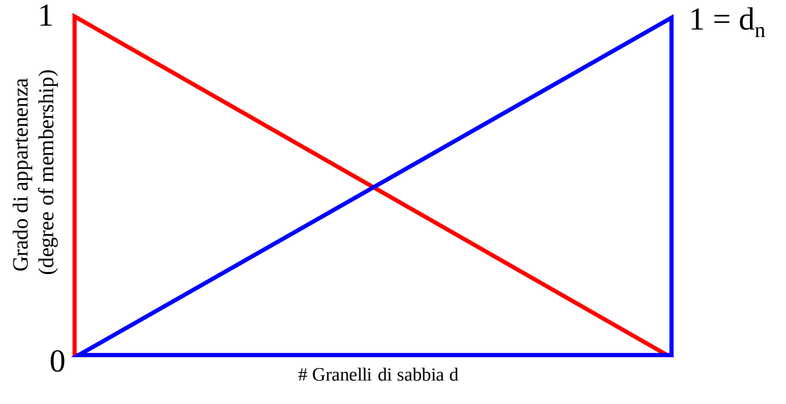



$S(d_k)$ castello_true



# Esempio di funzione di appartenenza (logica fuzzy)

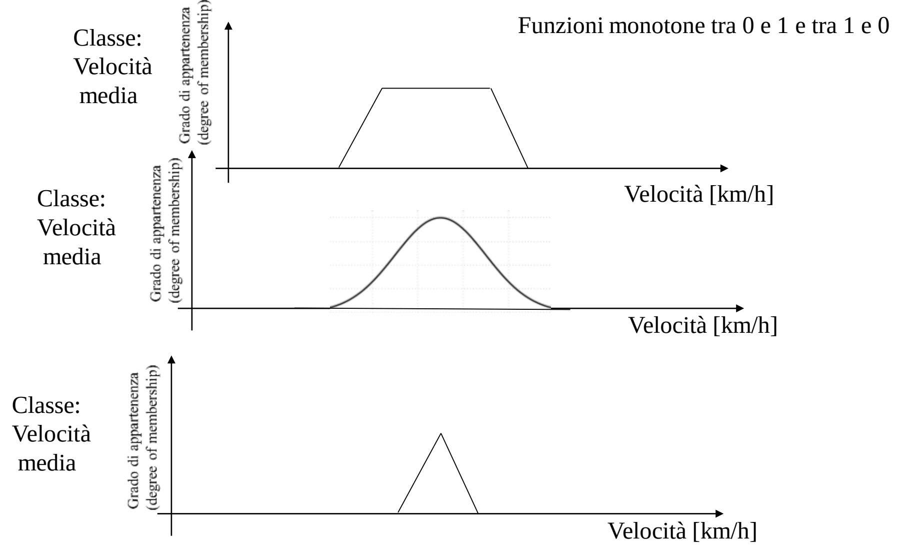
$0 = d_0 \le d_1 \le d_2 \le d_3 \le \ldots.. \le d_{n-1} \le d_n = 1$




$S(d_k)$ castello_false
$S(d_k)$ castello_true

$m_A(d)$ = Degree($d \in A$) è membership (elementhood) value o fit

# Altre forme di misura (membership function, $m_A(x)$ )




Le funzioni di membership si possono sovrapporre?



# Una variabile per più classi – logica classica

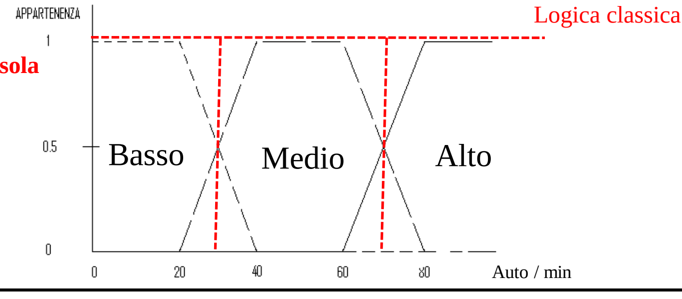
| Auto / min traffico | Grado di appartenenza a :(membership) | | |
|---|---|---|---|
| | BASSO | MEDIO | ALTO |
| 10 | 1 | 0 | 0 |
| 20 | 1 | 0 | 0 |
| **29** | **1** | **0** | **0** |
| **30** | **0** | **1** | **0** |
| 40 | 0 | 1 | 0 |
| 50 | 0 | 1 | 0 |
| 60 | 0 | 1 | 0 |
| 70 | 0 | 0 | 1 |
| 80 | 0 | 0 | 1 |

Differenti idee su cosa sia traffico basso, medio o alto.

Classi disgiunte.

Esiste un traffico "magico" (e.g. 29 auto / min) per cui si passa da una classe all'altra.

**Classificazione su una classe sola**



# Una variabile per più classi – logica fuzzy

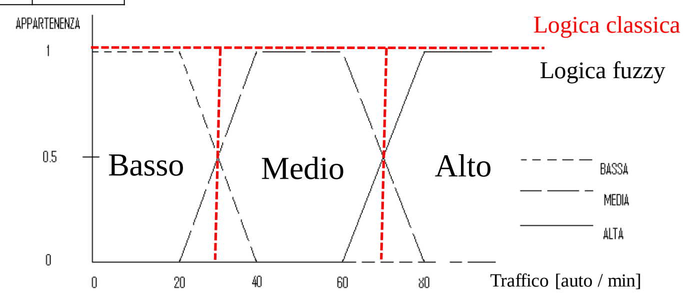
| Auto / min traffico | Grado di appartenenza a (membership) | | |
|---|---|---|---|
| | BASSO | MEDIO | ALTO |
| 10 | 1 | 0 | 0 |
| 20 | 1 | 0 | 0 |
| **29** | **0.55** | **0.45** | **0** |
| **30** | **0.5** | **0.5** | **0** |
| 40 | 0 | 1 | 0 |
| 50 | 0 | 1 | 0 |
| 60 | 0 | 1 | 0 |
| 70 | 0 | 0 | 1 |
| 80 | 0 | 0 | 1 |

Differenti idee su cosa sia traffico basso, medio o alto.

In generale le funzioni di membership hanno forma trapezoidale o triangolari.

Sovrapposizione tra le funzioni circa 25%

**Classificazione su più classi**




A.A. 2023-2024

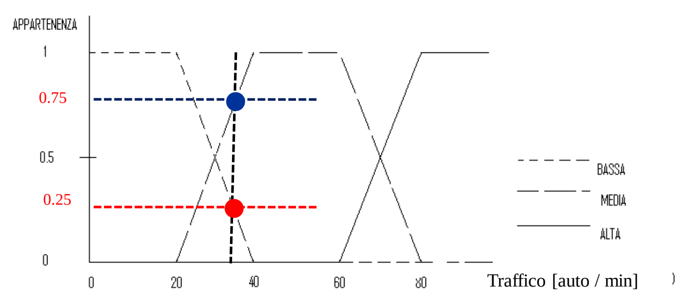
# Esempio

| Auto / min traffico | Grado di appartenenza a :(membership) | | |
|---|---|---|---|
| | BASSA | MEDIA | ALTA |
| 10 | 1 | 0 | 0 |
| 20 | 1 | 0 | 0 |
| 30 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 40 | 0 | 1 | 0 |
| 50 | 0 | 1 | 0 |
| 60 | 0 | 1 | 0 |
| 70 | 0 | 0.5 | 0.5 |
| 80 | 0 | 0 | 1 |

Un traffico di 35 auto / min come può essere classificato?

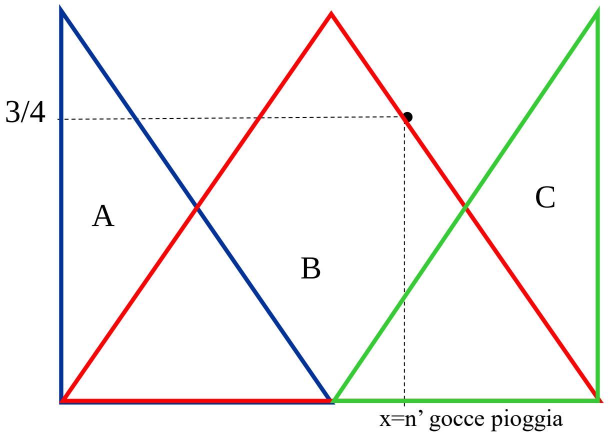
Medio con grado di membership 0.75.
Basso con grado di membership 0.25.

**Classificazione su più classi**




A.A. 2023-2024

## Una variabile, più classi - esempio




***Sta piovendo in modo leggero?***

Tre insiemi fuzzy
(e.g. pioggia):

A) Qualche goccia.
B) Pioggia leggera.
C) Pioggia intensa.

Esempio:
$m_B(x=n') = 3/4$
$m_C(x=n') = 1/4$



## Fuzzyness versus probability

La **fuzzyness** descrive l'ambiguità insita in un evento.
La **probabilità** descrive l'incertezza che l'evento avvenga.

Che un evento accada o meno è una questione di probabilità, in quale misura accada è un questione di fuzzyness.

La fuzzyness ha a che fare con la dimensione strutturale la probabilità con la dimensione temporale.

*Esempio:* "C'è il 20% di probabilità che domani ci sia pioggia leggera".

*Ma anche:* "Errori piccoli", "Clienti soddisfatti", "paesi in via di sviluppo", "segnali affetti da rumore", paesaggio (tante sfumature nella classificazione) ….

## Fuzzyness versus Probabilità (esempi)

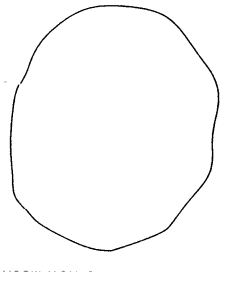
•Propongo un libro ad un editore. Qual è la probabilità che venga accettato? Può rispedirlo al mittente ma può chiedere una revisione più o meno pesante (è accettato il manoscritto?).

•Parcheggio la mia automobile (non è previsto che venga parcheggiata a cavallo delle strisce: si rischia la contravvenzione).

*Dopo che un evento è avvenuto, la sua probabilità svanisce.*



## Fuzzy versus probabilità (formalmente)



Ha più senso dire che questo è un ellisse fuzzy o che è proabilmente un ellisse?

Pur essendoci tutti gli elementi dell'evento, l'incertezza rimane. A cosa è dovuta?

Ha senso scrivere che: $m_A(x) = \text{Prob}\{x \in A\}$ true?

*La fuzzyness è un'incertezza deterministica.*

# Gli operatori logici nella logica fuzzy

Introduzione di una **norma**, detta T-norm (Lukasiewics, 1970) che induce una metrica. La norma è il grado di membership.

**T**(A **AND** B) = ***min***(**T**(A), **T**(B)) $0 \le T(A) \le 1$

**T**(A **OR** B) = ***max***(**T**(A), **T**(B))

**T**(**NOT**-A) = 1 – **T**(A) Zadeh, 1969.

Si noti che gli operatori min e max valgono anche per la logica classica.

Segue che: **T**(A **AND** $A^c$) + **T**(A **OR** $A^c$) = 1 (dimostrare!).



# Esempio di AND, OR e NOT

Eventi. Membership function associata a 4 classi che costituiscono A e B:

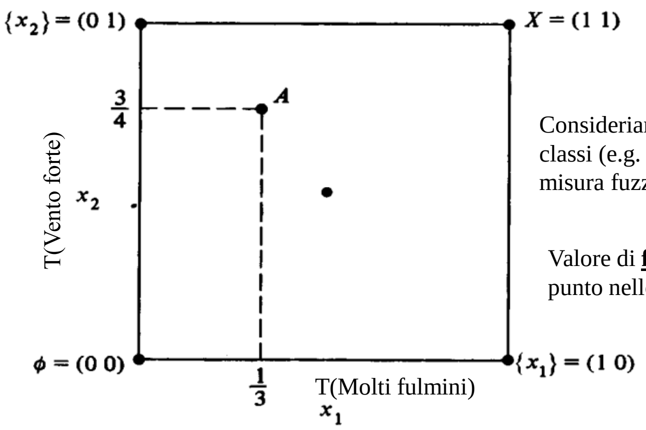
a, b, c, d

| | Logica fuzzy | | Logica classica |
|---|---|---|---|
| | A = ( 1. .8 0. .5) | | A = (1 0 0 1) |
| | B = (.4 .4 .7 .7) | | B = (0 0 1 1) |
| OR | $A \cup B$ = ( 1. .8 .7 .7) | | $A \cup B$ = (1 0 1 1) |
| AND | $A \cap B$ = ( .4 .4 0. .5) | | $A \cap B$ = (0 0 0 1) |
| | $A^c$ = (0 .2 1. .5) | | $A^c$ = (0 1 1 0) |
| | $A \cap A^c$ = (0 .2 0. .5) | $\mathbf{A \cap A^c \neq \varnothing}$ | $A \cap A^c$ = (0 0 0 0) |
| | $A \cup A^c$ = (1 .8 1. .5) | $\mathbf{A \cup A^c \neq X}$ | $A \cup A^c$ = (1 1 1 1) |
| | $A \cap A^c + A \cup A^c = 1$ | | $A \cap A^c + A \cup A^c = 1$ |

$A \cup B$ Caratteristica presente al minimo grado in entrambi gli insiemi.
$A \cap B$ Caratteristica presente al massimo grado in entrambi gli insiemi.

# Rappresentazione geometrica di un evento fuzzy

Consideriamo un insieme temporale caratterizzato da 2 classi fuzzy: vento forte e molti fulmini




Su ogni asse il grado di appartenenza ad una classe.

Consideriamo un evento A associate alle due classi (e.g. temporale forte) e associamo una misura fuzzy.

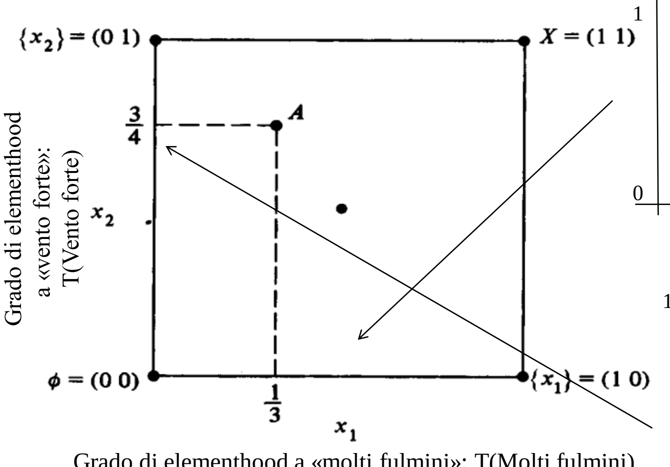
Valore di **fit** dell'evento A = (1/3, 3/4). E' un punto nello spazio fuzzy a 2 dimensioni.

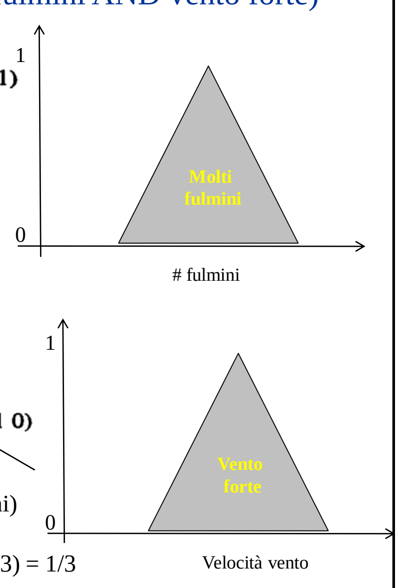
*Un certo evento fuzzy caratterizzato dall'insieme fulmini e vento forte è rappresentabile come un punto in un ipercubo di 2 dimensioni (quadrato) $I_2 = [0,1]x[0,1] = [0,1]^2$ (in generale, $I_n = [0,1]^n$).*



# Misura di verità di un evento fuzzy

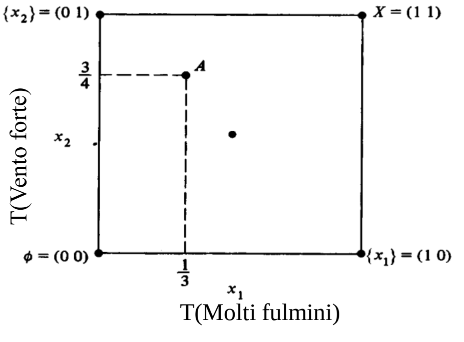
C'è un temporale? Temporale = T if (Molti fulmini AND vento forte)




T(temporale) = T(vento_forte) and T(molti_fulmini) = min(3/4; 1/3) = 1/3
C'è un temporale con grado di verosimiglianza 0,3.

## Proprietà dello spazio fuzzy (I)



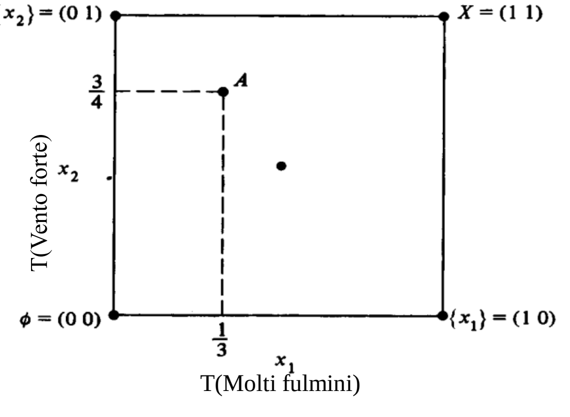

I vertici dell'ipercubo cosa rappresentano?

NF = {Ø, X, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$}.

***I 4 vertici rappresentano i 4 insiemi non fuzzy dello spazio fuzzy definito dalle 2 classi: vento forte e molti fulmini: eventi certi a cui si applica la logica crisp.***



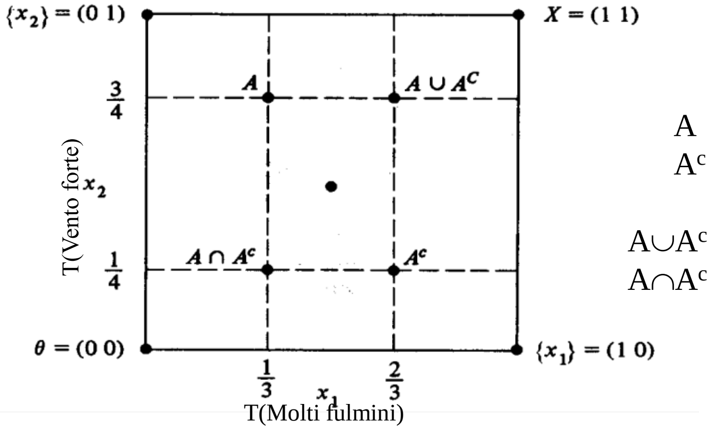
## Proprietà dello spazio fuzzy (II)




Dove troviamo la massima indecisione?

Al centro: $A \cup A_c = A \cap A_c$

# Proprietà dello spazio fuzzy (III)



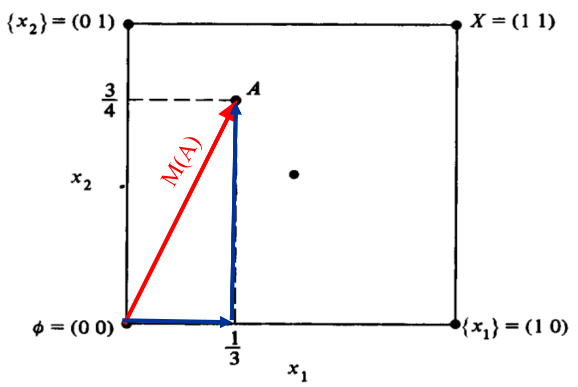

A = ( 1/3  3/4)
$A^c$ = (2/3  1/4)

$A \cup A^c$ = (2/3  3/4)  Max
$A \cap A^c$ = (1/3  1/4)  min

•Può diventare crisp se un evento assume un valore estremo della classe.
•Se sono massimamente fuzzy sia $x_1$ che $x_2$: $A \cup A^c = A \cap A^c$ = (1/2  1/2).



# Misure geometriche in un insieme fuzzy




Norma di un vettore:

$$M(A) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |m_A(x_i)|^p}$$

n: numero di classsi fuzzy

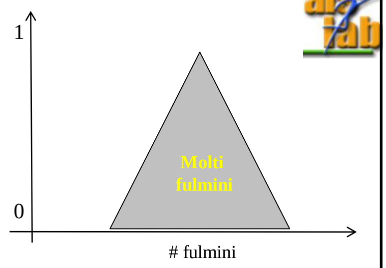
Per p = 2 misuriamo la lunghezza del vettore A – O.
Per p = 1 misuriamo la somma delle coordinate (in valore assoluto)

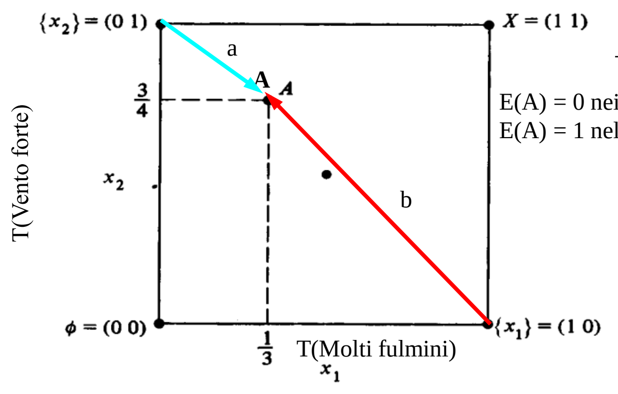
***Distanza fuzzy – city block*** **-> $l_1$** **$0 \le M(A) = 1/3+3/4 = 13/12 \le n$**
*Distanza euclidea.* -> $l_2$ $0 \le M(A) = \sqrt[2]{97/144} \le n$

La distanza in norma $l_1$ è più facile da calcolare

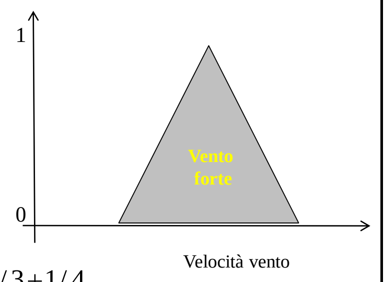
# Entropia fuzzy

How (much) fuzzy is a fuzzy set? Esempio del temporale.




E(A) = 0 nei vertici
E(A) = 1 nel centro




$$E(A) = \frac{a}{b} = \frac{l^1(A, A_{vicino})}{l^1(A, A_{lontano})}$$

$$0 \le E(A) = \frac{1/3 + 1/4}{2/3 + 3/4} = 7/17 \quad 0 \le 1$$



# Paradossi associati al centro

Il bugiardo di Creta che diceva che tutti a Creta erano bugiardi.

Il barbiere di Bertrand Russell. Fuori dal suo negozio era appeso un cartello che diceva: “il barbiere taglia la barba solamente a tutti quelli che non se la tagliano da soli”. Chi taglia la barba al barbiere?

Prendiamo una carta che dice su un lato: “Quello che è riportato sull’altro lato è vero” e sull’altro: “Quello che è riportato sull’altro lato è falso”.

Apro il frigorifero in cui trovo una mezza mela (bicchiere mezzo pieno e mezzo vuoto) – c’è una mela in frigorifero?

Al centro: A U $A_c$ = A $\cap A_c$
Esempio A: barbiere, $A_c$ : non_barbiere

# Riassunto

•Fuzzyness descrive l’ambiguità di un evento.

•La funzione di appartenenza descrive il grado di appartenenza di un evento ad una o più classi (non mutuamente esclusive, le funzioni di membership sono parzialmente sovrapposte).

•La fuzzyness si distingue dalla probabilità che misura la probabilità che un evento, nella sua interezza si verifichi o meno.

•Si possono definire attraverso la T-norm, le operazioni logiche tra insiemi fuzzy: AND, OR e NOT.

•Un oggetto fuzzy si può rappresentare come un punto all’interno di un ipercubo di dimensionalità pari al numero di elementi che caratterizzano l’oggetto.

•E’ possibile associare ad un insieme fuzzy una misura di entropia che rappresenta il rapporto tra la misura della violazione della legge di non contraddizione e del terzo escluso.



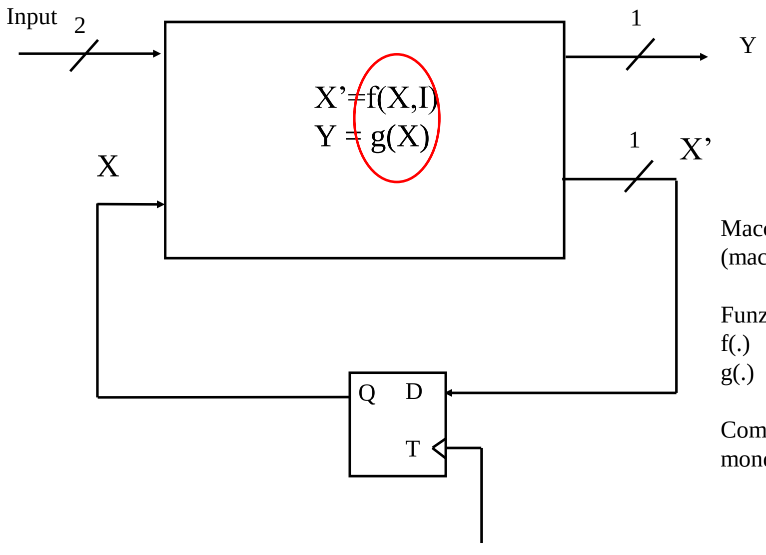
# Overview

I fuzzy set

I fuzzy system

| $\theta'$ \ $\theta$ | NL | NM | NS | ZE | PS | PM | PL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NL | | | | PL | | | |
| NM | | | | PM | | | |
| NS | | | | PS | NS | | |
| ZE | PL | PM | PS | ZE | NS | NM | NL |
| PS | | | PS | NS | | | |
| PM | | | | NM | | | |
| PL | | | | NL | | | |

# Macchine che implementano la logica classica




Macchina a stati finiti
(macchina di Huffman)

Funzioni logiche:
f(.)
g(.)

Come diventano nel
mondo dei sistemi fuzzy?



# Breve storia

Max Black (1937). Applico' i principi della logica fuzzy a liste di elementi o simboli. Sviluppo' la prima funzione di appartenenza fuzzy e chiamo' l'incertezza dell'appartenenza **vaghezza** (vagueness).

Lofti Zadeh (1965). "Fuzzy sets" sviluppo' una teoria sugli insiemi fuzzy ed una logica (fuzzy) in grado di lavorare su questi insiemi.

**Ebrahim Mamdani (1974) dimostrò come utilizzare la logica fuzzy per risolvere problemi applicativi (inferenza fuzzy).**

Dal 1985 ad oggi applicazioni tecnologiche con successo crescente in campi più diversi, dal controllo, alla ricerca nei data base, all'elaborazione delle immagini alla classificazione. Vediamo di capirne i fondamenti del successo.

# Applications to real world (helicopter control)


Linköping Studies in Science and Technology
Thesis No. 938

**Fuzzy Control for an Unmanned Helicopter**

by

**Bourhane Kadmiry**

INSTITUTE OF TECHNOLOGY
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Submitted to the School of Engineering at Linköping University in partial fulfillment of the requirements for degree of Licentiate of Engineering.

Department of Computer and Information Science
Linköpings universitet
SE-581 83 Linköping, Sweden

Linköping 2002


Michal Lower
Institute of Engineering Cybernetics
Wroclaw University of Technology
Wyb. Wyspianskiego 27, 50-370 Wroclaw, Poland
Michal.Lower@pwr.wroc.pl

Boguslaw Szlachetko
Institute of Telecommunication and Acoustics
Wroclaw University of Technology
Boguslaw.Szlachetko@pwr.wroc.pl

Dariusz Krol
Institute of Applied Informatics
Wroclaw University of Technology
Dariusz.Krol@pwr.wroc.pl

**Abstract**

*This paper relates to a fuzzy flight control system in spot hovering for a single-rotor helicopter PZL Kania[1]. The model of the fuzzy control system was developed on the basis of computer simulation experiments done by the expert's analysis (pilot's knowledge). The helicopter's mathematical*

all the axis oriented to the fuselage was considered, assuming that fuzzy regulator works during and after the blow.

Although limited amount of expert's knowledge was available, the results proved the stability of the system. Hover parameters after the blow disturbances stabilize in all considered axes.


In Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 805-810, Oct 2003, Las Vegas, USA

**A Tale of Two Helicopters**

Srikanth Saripalli[1], Jonathan M. Roberts[2], Peter I. Corke[2], Gregg Buskey[3,2]
Gaurav S. Sukhatme[1]
[1]Robotics Research Lab, University of Southern California
Los Angeles, USA
[2]CSIRO Manufacturing & Infrastructure Technology
PO Box 883, Kenmore, Qld 4069, Australia
[3]University of Queensland
St. Lucia, Qld 4066, Australia

shrabar
{{date}}, {{tir
In Proceedir
International
Intelligent R
Systems, pp
2003, Las V

**Abstract**

*This paper discusses similarities and differences in autonomous helicopters developed at USC and CSIRO. The most significant differences are in the accuracy and sample rate of the sensor systems used for control. The USC vehicle, like a number of others, makes use of a sensor suite that costs an order of magnitude more than the vehicle. The CSIRO system, by contrast, utilizes low-cost inertial, magnetic, vision and GPS to achieve the same ends.*

*We describe the architecture of both autonomous helicopters, discuss the design issues and present comparative results.*



# Sistemi esperti

•E' basato su regole in parallelo (legate da AND e OR) che rappresentano la conoscenza (ipotesi debole sull'AI).

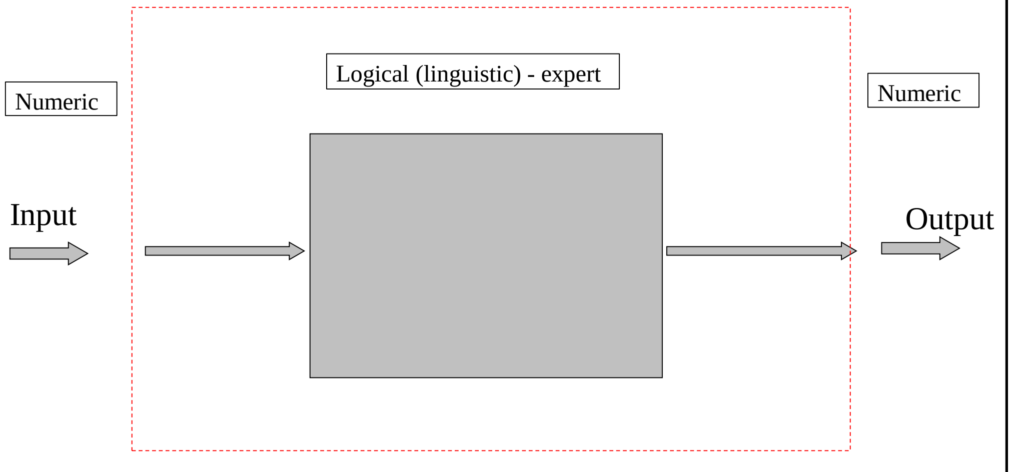
•Funziona mediante un motore inferenziale che lavora sulle regole. Il motore è del tipo: IF ..... THEN ..... ELSE (*reasoning engine*). Si parla anche di intelligenza artificiale.

•La risposta T / F (modalità del tipo winner-take-all, e.g. classificazione).

•Sistemi di analisi di guasti, sistemi di diagnosi automatica (Computer-Aided Diagnosis), ragionamento automatico, …. tutto …. (noi stessi pretendiamo di essere dei sistemi esperti!), …. controllo….

• Partono da input / output binari (vero / falso), come estendiamo al mondo delle variabili continue (quantità di pioggia, temperatura, valore delle azioni…).

# Struttura di un sistema fuzzy




Cosa ci mettiamo dentro?



# Tabelle della verità

$F = f(A,B,C)$

$F_1 = \bar{A}B\bar{C} + AB$

| A | B | C | $F_1$ | $F_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$F_1$ = True

iif

A = False AND B = True AND C = False
*OR*
A = True AND B = True AND C = False
*OR*
A = True AND B = True AND C = True

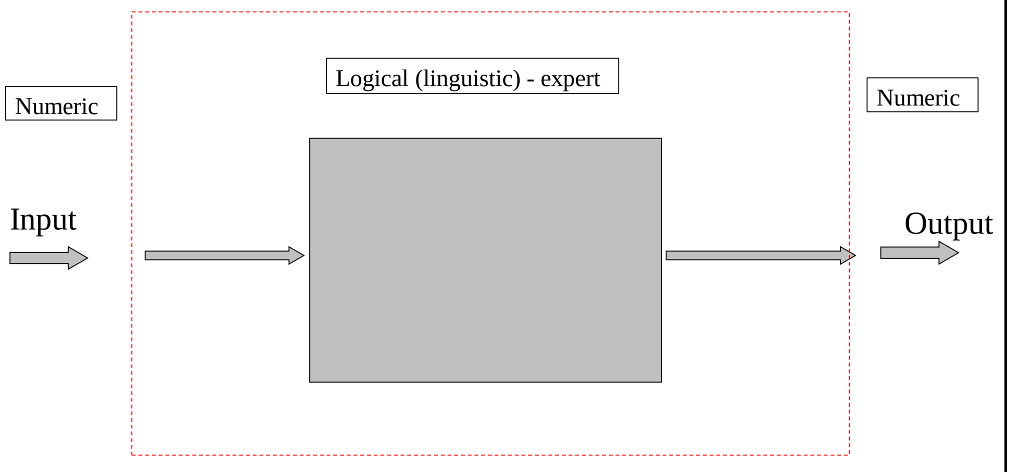
Insieme di regole. Si possono enunciare tutte le situazioni (regole possibili)

Viene attivata 1 sola regola alla volta nella logica classica (1 mintermine, qui $m_2$).

Vengono portate in ingresso 3 variabili (T/F) e vengono portate in uscita 2 variabili (T/F).

**Si possono memorizzare in una ROM/FPGA**

## Struttura di un sistema logico




Cosa ci mettiamo dentro? Una ROM (Input = indirizzo; dato = output)



## Tabelle della verità e Sistemi Fuzzy

$F = f(A,B,C)$

$F = \bar{A}B\bar{C} + AB$

| | A | B | C | F |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $M_1$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $m_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 |

F = True

iif

A = False AND B = True AND C = False

*OR*

A = True AND B = True AND C = False

*OR*

A = True AND B = True AND C = True

F = False negli altri casi (per i maxtermini)

La variabile, C, può assumere contemporaneamente il valore T e F e quindi attivo la regola (mintermine) che prescrive l'uscita = T ($m_2$) e la regola (maxtermine) che prescrive l'uscita = F ($M_1$).

L'uscita della funzione F(.) può essere T e F.

Cosa faccio?

# Tabelle della verità e Sistemi Fuzzy

$F = f(A,B,C)$

$F = \bar{A}B\bar{C} + AB$

| | A B C | F |
|---|---|---|
| | 0 0 0 | 0 |
| $M_1$ → | 0 0 1 | 0 |
| $m_2$ → | 0 1 0 | 1 |
| | 0 1 1 | 0 |
| | 1 0 0 | 0 |
| | 1 0 1 | 0 |
| | 1 1 0 | 1 |
| | 1 1 1 | 1 |

F = True
iif
A = False AND B = True AND C = False
*OR*
A = True AND B = True AND C = False
*OR*
A = True AND B = True AND C = True

F = False negli altri casi (per i maxtermini)

**Modifiche strutturali:**

**Le regole si possono sempre memorizzare in una ROM ma:**

Occorre potere accedere a più di una parola di memoria per ogni dato in ingresso -> Regole attivate (Input ➔ Output).

**Occorre memorizzare l'informazione sul grado di fit dell'input.**



# Funzionamento di un sistema fuzzy

- L'uscita di ogni regola (funzione) viene considerata con un certo **grado di verosimiglianza** o membership.

- Vengono utilizzate più regole in parallelo (legate da AND e OR) che rappresentano la conoscenza.

- L'uscita e' ottenuta combinando le regole (che possono prescrivere valori di uscita diversi). Vengono «interpolate le regole».

- Nella combinazione si tiene conto del grado di membership associato a ciascuna regola.

Dal punto di vista geometrico, mappa un ipercubo n-dimensionale d'ingresso in un inpercubo p-dimensionale di uscita:

➔ **FAM** (*Fuzzy Associative Memories*). $S : I^n \rightarrow I^p$

definendo la mappatura (attraverso le funzioni logiche) dei vertici. Ovverosia si prescrive una corrispondenza tra vertici in ingresso e vertici in uscita e poi si interpola all'interno degli iper-cubi.

# Fuzzy Associative Memory (FAM)

Una FAM **trasforma** una spazio di input in uno spazio di output (è un'evoluzione della tabella della verità).

1) Spazi continui.
2) Spazi fuzzy.

Dal punto di vista logico, una FAM implementa un insieme **di funzioni logiche** su delle variabili fuzzy in ingresso (un tabella della verità rappresenta un insieme di funzioni logiche su variabili booleane – logiche).

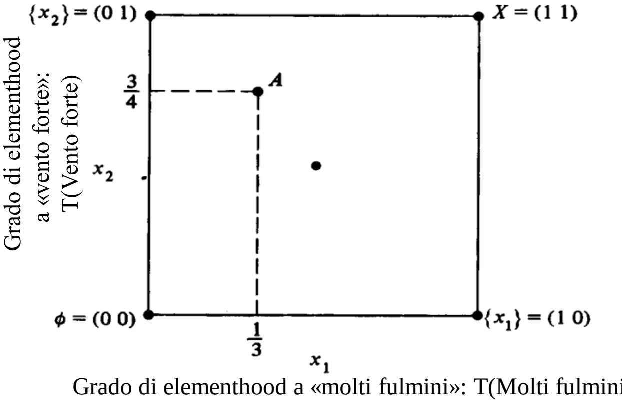
**Le funzioni logiche sono quelle della logica classica, le variabili sono fuzzy.**

Matematicamente una FAM opera la seguente trasformazione: $I^n \rightarrow I^p$
dove $n$ è il numero di classi dell'insieme fuzzy di ingresso e $p$ è il numero di classi dell'insieme fuzzy di uscita.

La trasformazione viene definite specificando la trasformazione sui vertici dell'iper-cubo (regole logiche); si interpola utilizzando il grado di membership delle classi in ingresso, dei valori in uscita.



# Rappresentazione grafica di una FAM




Definisco la mappatura dei vertici, la mappatura dei punti interni avviene tramite il grado di fit

# Esempio di una FAM

Una FAM **trasforma** una spazio di input in uno spazio di output.

1) **Spazi continui.**
2) Spazi fuzzy.

Dato un insieme fuzzy A ∈ $I^n$, viene definito un insieme B ∈ $I^p$, che gli corrisponde (notazione alternativa (A,B)).

La trasformazione **continua** da A a B, può essere descritta mediante l'insieme **finito** delle trasformazioni (***regole - funzioni***) tra gli insiemi che costituiscono A e B $\{(A_i,B_j)\}$; $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq p$.

| | | |
|---|---|---|
| E.g. | Traffico: | A ∈ $I^n$ = {Assente, leggero, medio, pesante}. |
| | Durata semaforo verde: | B ∈ $I^p$ = {Breve, media, lunga} |

Esempio di regola:

(Traffico_leggero, Durata_semaforo_breve) -- $(A_2,B_1)$

Per ogni combinazione delle classi dell'insieme di ingresso viene data una regola (definita un'uscita - cf. tabella della verità)

Peso della regola. Dipende da quanto è fit la proposizione «traffico leggero» => fit della regola



# Dove entra la fuzzyness?

La FAM traduce delle **funzioni linguistiche (logiche) tra A e B.**

Le associazioni sono tra A e B. Ovverosia ad ogni insieme (fuzzy) di A (input), viene associato un insieme (fuzzy) di B (output). E.g. Se il traffico è leggero, regola la durata del verde a media.

Fino qui siamo nel dominio della logica classica. Qual'è il problema?

•L'associazione è tra 2 classi $(A_i,B_j)$. Ma l'evento (densità di traffico) può appartenere a due classi diverse, $A_i$, che sono associate a due o più classi tra le possibili classi, $B_i$, di uscita. Cosa facciamo?

•Le due classi rappresentano un intervallo di valori, come lo trattiamo?

## Esempio di costruzione di una FAM

Controllore di un semaforo. Misuriamo la portata del traffico e vogliamo un controllore che generi una lunghezza in secondi.

Ingresso: misura del traffico. 3 classi fuzzy: SCARSO, MEDIO, PESANTE.

Uscita: durata verde: 2 classi fuzzy: BREVE, LUNGO.

Abbiamo 3 regole in tutto ($I^3$ -> $I^2$):

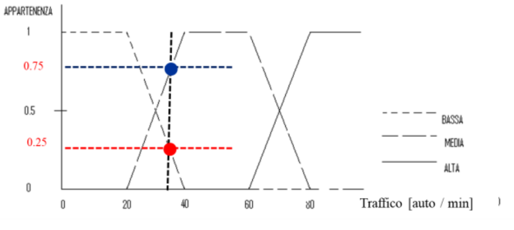
(regola 1) IF (SCARSO) THEN (BREVE)
(regola 2) IF (MEDIO) THEN (LUNGO)
(regola 3) IF (ALTO) THEN (LUNGO)

← FAM



## Fuzzyficazione: dall'input numerico alle classi fuzzy

Necessità di tradurre l'approccio linguistico in numeri.




Fuzzyficazione viene risolta con le funzioni di membership:

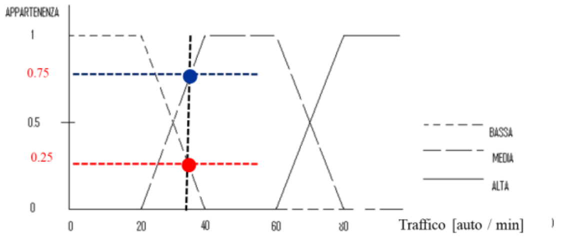
E.g. 55 auto / min è un traffico:
- *Scarso* con grado di fit 0.2
- *Medio* con grado di fit 0.8

m(A=BASSO) = 0.2
m(A = MEDIO) = 0.8
m(A=ALTO) = 0

*Il traffico è sia scarso che medio*

# Utilizzo della FAM

(regola 1) IF (BASSO) THEN (BREVE)
(regola 2) IF (MEDIO) THEN (LUNGO)
(regola 3) IF (ALTO) THEN (LUNGO)




**La fitness della classe diventa la fitness della regola**

Solamente le prime 2 regole (associate a traffico *Scarso* e *Medio*) vengono attivate.
If ($A_1$) then $B_1$ Se è basso allora semaforo **breve**, grado 0.2
If ($A_2$) then $B_2$ Se è medio allora semaforo **lungo**, grado 0.8

Durata?



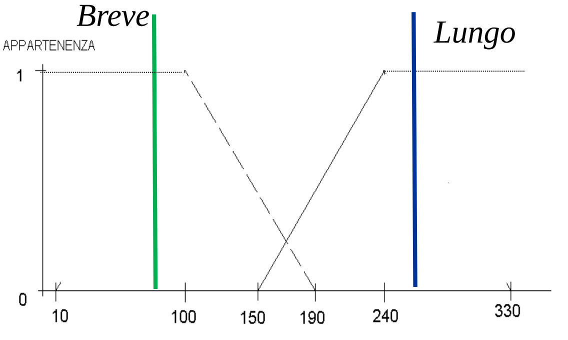
# Dalle classi fuzzy in output alla generazione dell'output numerico

L'output viene deve essere convertito in un valore numerico.

Breve = 80s

Lungo = 260s

Quanto deve durare il semaforo?




Solamente le prime 2 regole (associate a traffico *Scarso* e *Medio*) vengono attivate.
If ($A_1$) then $B_1$ Se è basso allora semaforo **breve**, grado 0.2
If ($A_2$) then $B_2$ Se è medio allora semaforo **lungo**, grado 0.8

# Defuzzyficazione mediante media pesata

$$Uscita = y = \frac{\sum F_i * y_i}{\sum F_i}$$

$F_i$ peso della regola i attivata, fit della regola
$y_i$ azione associata alla regola i: $(A_i, B_i)$

L'uscita di ciascuna regola viene pesata con il grado di fit della classe in ingresso alla regola.

**Tanto maggiore è il grado di fit, di verosimiglianza, della variabile in ingresso, tanto maggiore sarà il peso dell'azione intrapresa in funzione di quella variabile.**

Non interessa qui la forma degli insiemi fuzzy di output.

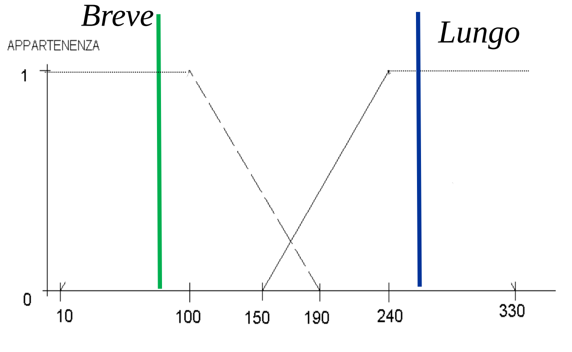


# Metodo della media pesata

Breve = 80s

Lungo = 260s

Quanto deve durare il semaforo?




Solamente le prime 2 regole (associate a traffico *Scarso* e *Medio*) vengono attivate.

If $(A_1)$ then $B_1$ Se è basso allora semaforo **breve**, grado 0.2
If $(A_2)$ then $B_2$ Se è medio allora semaforo **lungo**, grado 0.8

Durata = $\frac{\sum F_i * y_i}{\sum F_i}$ = (0.2*80 + 0.8*260 / (0.2+0.8) = 224 s

# Defuzzyficazione mediante massimo

$$y = \max_{1 \le j \le k} m_B(y_j)$$

Viene scelta l'uscita proveniente da una delle proposizioni linguistiche attivate
=
Viene utilizzata un'unica regola.

La scelta della regola dipende dal valore di fit della classe in ingresso.

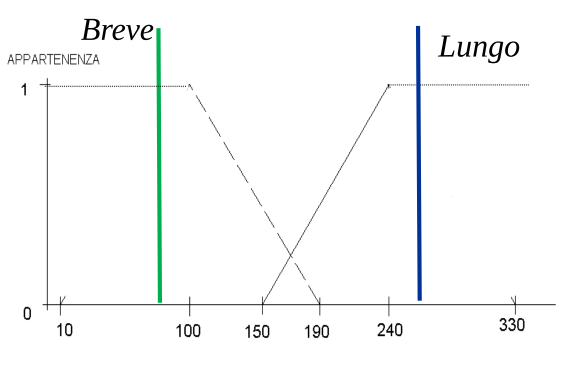


# Metodo del massimo

Breve = 80s

Lungo = 260s

Quanto deve durare il semaforo?




Solamente le prime 2 regole (associate a traffico *Scarso* e *Medio*) vengono attivate.
If ($A_1$) then $B_1$ Se è basso allora semaforo **breve**, grado 0.2
If ($A_2$) then $B_2$ Se è medio allora semaforo **lungo**, grado 0.8

"Vince" la seconda regola e la durata del semaforo sarà "lunga" (260 s).

# Defuzzyficazione mediante media pesata con le aree

La tecnica della media pesata non tiene conto della forma delle classi associate alle variabili di uscita: una classe molto ampia ha lo stesso peso di una classe molto stretta.

Si preferisce perciò utilizzare il criterio di fitness della variabile in ingresso per individuare un'area nella classe di uscita.

$$Y = \frac{\int y m_B(y) dy}{\int m_B(y) dy}$$

L'integrale dà il peso della regola.

Gli integrali diventano una sommatoria per membership function semplici.

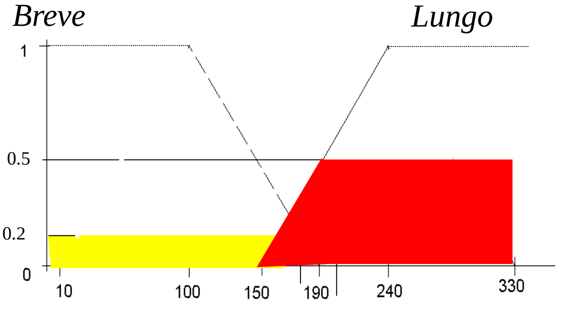


# Metodo delle aree

L'output viene mappato in classi fuzzy analogamente all'input.

Breve = 80s

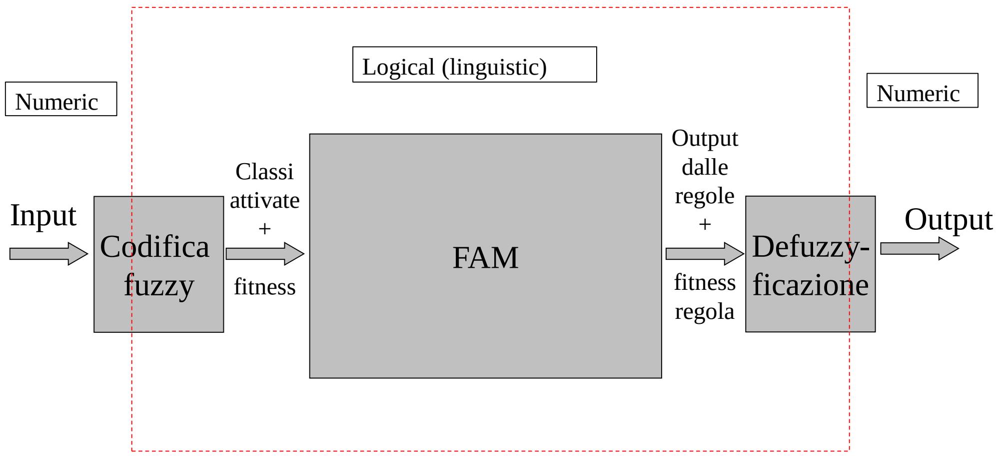
Lungo = 260s




Quanto deve durare il semaforo?

Confrontare con il valore ottenuto con la media peseta.

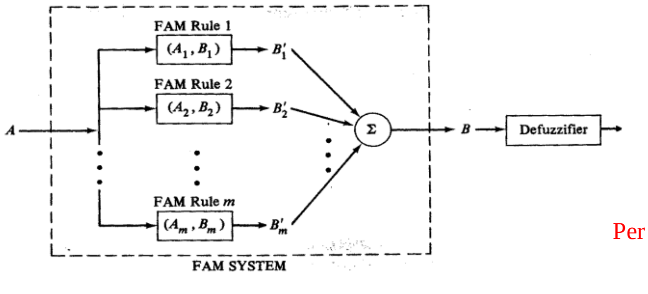
# Struttura di un sistema fuzzy




Tutte le regole della FAM ricevono un input, sono effettivamente attivate quelle che hanno un input con fitness > 0



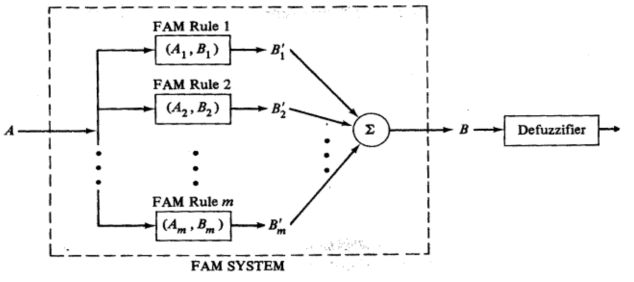
# Progettazione di un sistema fuzzy: struttura




Per tutti i modelli

1) Identificazione delle variabili di I/O del sistema e del loro range (A e B).
2) Identificazione delle classi fuzzy in cui le variabili sono da suddividere e dei loro boundaries.
3) Definizione della trasformazione I/O come insieme di regole logiche: per ogni combinazione di classi fuzzy (con OR e/o AND) di input attive è possibile definire una classe di output (FAM).
4) Modalità di de-fuzzyficazione.

# Progettazione di un sistema fuzzy: funzionamento




1) Identificazione delle classi attivate da un certo input.
2) Valutazione del grado di fit delle classi.
3) Identificazione delle regole attivate.
4) Valutazione del grado di fit della regola.
5) Unione degli insiemi fuzzy di output risultanti e calcolo di un singolo valore numerico (defuzzyficazione).



# Overview

I fuzzy set

I fuzzy system

| $\theta'$ \ $\theta$ | NL | NM | NS | ZE | PS | PM | PL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NL | | | | PL | | | |
| NM | | | | PM | | | |
| NS | | | | PS | NS | | |
| ZE | PL | PM | PS | ZE | NS | NM | NL |
| PS | | | PS | NS | | | |
| PM | | | | NM | | | |
| PL | | | | NL | | | |