Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – controllo del peso delle articolazioni

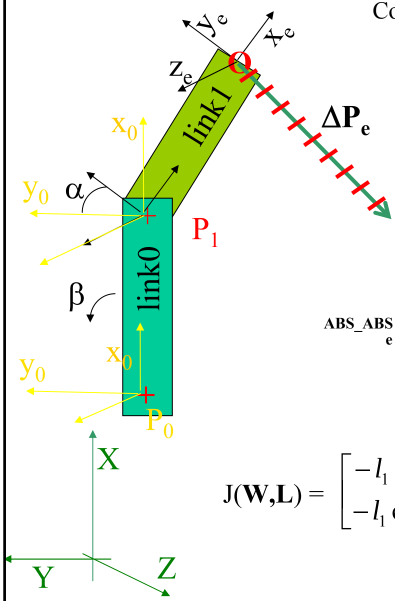
Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Robotica ed Animazione Digitale.

Sommario

- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sottodeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Privilegio di gradi di libertà di controllo.

Cinematica inversa



Consideriamo la trasformazione end_point -> joint.

La trasformazione joint -> end_point è:
P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

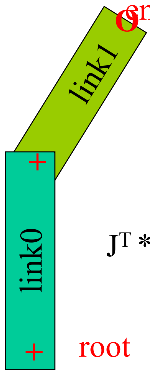
$$^{ABS\_ABS}{}_{e}\mathbf{A(t)} = \begin{bmatrix} l_1\cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0\cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1\sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0\sin\beta(t) + T_y(t) \end{bmatrix}$$

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 2, n = 4)

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b \qquad b = \underset{2 \times 1}{\begin{bmatrix} dP_{e_x}/dt \\ dP_{e_y}/dt \end{bmatrix}} \qquad x = \underset{4 \times 1}{\begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \\ dT_x/dt \\ dT_y/dt \end{bmatrix}}$$



Supponiamo: α = β = 45° / $T_x = T_y = 0$

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0\sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0\cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o\sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o\sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2l_1 l_o\sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0\sin 45 & -l_0\cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0\sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0\cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (m=2, n=4)

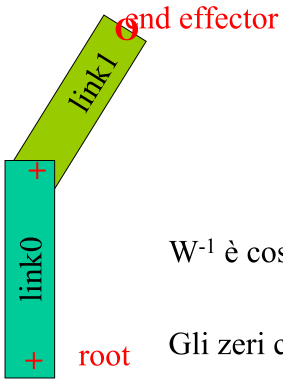
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

?

$\det(J^T * J) = 0$

$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$

$$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'\, J^T\, b}}$$



W^{-1} è costituita ad esempio così: $\begin{bmatrix} 1/w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Gli zeri corrispondono ai valori singolari nulli

Rank-deficiency nella matrice dei coefficienti

$x = (A'*A)^{-1} A'* b$

$$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'\, A'b}}$$

Se A è rank-deficient, A'*A è singolare.

Si può facilmente osservare valutando il valore singolare più piccolo della matrice W.

In questo caso il problema è sovraparametrizzato.

Soluzione (m=2, n=4)

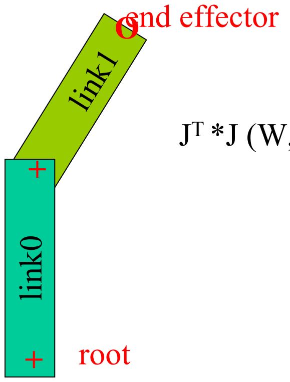
$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e{}_x = 1$ $dP^e{}_y = 0$

$\det(J^T * J) = 0$



$$J^T * J\ (W,L) = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione (m=2, n=4)

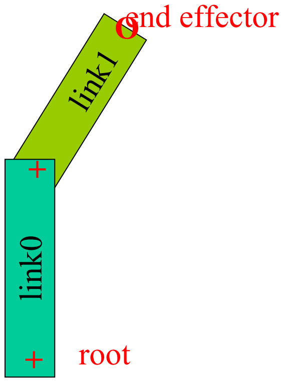
$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e{}_x = 1$ $dP^e{}_y = 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' b}$

$\det(J^T * J) = 0$




```
>>[U W V] = svd(JJ)
U =
  -0.4469   0.5005  -0.7398   0.0497
  -0.8633  -0.2591   0.3622   0.2375
   0.2234  -0.2502  -0.2432   0.9101
   0.0710   0.7873   0.5122   0.3359
W =
  18.1915        0        0        0
        0   1.4653        0        0
        0        0   0.0000        0
        0        0        0   0.0000
V =
  -0.4469   0.5005   0.7407   0.0336
  -0.8633  -0.2591  -0.3333  -0.2766
   0.2234  -0.2502   0.3436  -0.8771
   0.0710   0.7873  -0.4713  -0.3911
```

Soluzione (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$
$l_0 = l_1 = 2$ $\quad dP^e_x = 1$ $\quad dP^e_y = 0$

$\boxed{x = V' W^{-1} U' J' b}$

$W^{-1} =$

0.0550	0	0	0
0	0.6824	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\det(J^T * J) = 0$

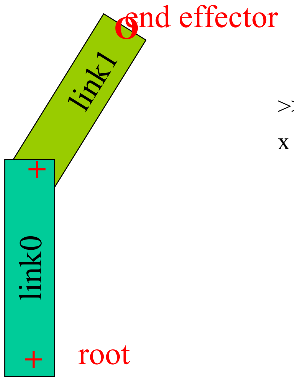
NB: Matlab fornisce già V sotto forma di trasposta

`>>x = V' * W-1 * U' * J' * bb`

x =

-0.2251
-0.1281
0.1125
-0.1811

Norma in l^2 pari a 0.3355



Verifica Soluzione

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$
$l_0 = l_1 = 2$ $\quad dP^e_x = 1$ $\quad dP^e_y = 0$

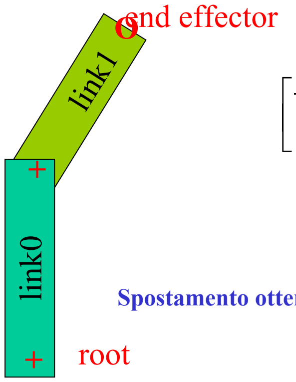
$\boxed{x = V' W^{-1} U' J' b}$

Soluzione mediante pseudo-inversa

$J * \Delta w = \Delta P$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.2251 \\ -0.1281 \\ 0.1125 \\ -0.1811 \end{bmatrix}}_{\Delta w} = \underbrace{[1 \ 0]^T}_{\Delta P}$$

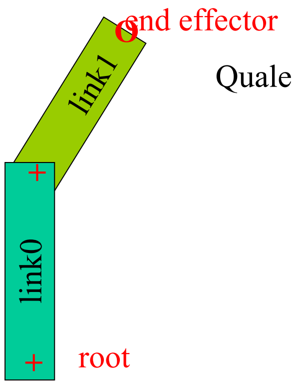
Spostamento ottenuto = spostamento desiderato



Proprietà della Soluzione

Proprietà: soluzione a norma minima

Altre possibili soluzioni si potrebbero ottenere, ma aumentano la norma della soluzione



Quale altra soluzione sarebbe possibile per ottenere lo spostamento desiderato: {1 0}?

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\Delta P^e_x = 1$ $\Delta P^e_y = 0$

Sommario

- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sottodeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Privilegio di gradi di libertà di controllo.

Come favorire un joint

dP = J dΘ min || dP – J dΘ || $\|d\Theta\|$ a norma minima

Come modificare dΘ senza che l'equazione sia alterata?

Supponiamo di volere favorire alcune soluzioni

Minimizziamo la norma della soluzione in modo esplicito pesando l'ampiezza delle componenti della soluzione.

Il problema si trasforma in un problema di regolarizzazione:

$$\min (\| J\, d\Theta - dP \| + \lambda\, C\|d\Theta\|)$$

C(dΘ) penalizza ampie variazioni di orientamento

Ad esempio C(dΘ) = $\sum_k c_k (\vartheta_k - \vartheta_{ko})^b$, esponente b pari. Per b = 2, si minimizza la norma.

Sviluppo della regolarizzazione

$$\min (\| J\, d\Theta - dP \| + \lambda\, C(d\Theta))$$

C(dΘ) penalizza ampie variazioni di orientamento

Ad esempio C(dΘ) = $\sum_k c_k (\vartheta_k - \vartheta_{ko})^b$ b pari

$$[2J^T(J\, d\Theta - dP) + \lambda\, C(d\Theta)]/\delta\theta = 0$$

Nel caso di funzione quadratica, il risultato è relativamente semplice

$$J^T(J\, d\Theta - dP) + \lambda\, C\, \Theta = 0$$ C matrice dei pesi

Da cui risulta:

$$J^T(J\, d\Theta - dP) + \lambda\, C\, \Theta = 0$$

$$\boxed{\Theta = (J^TJ + \lambda\, C)^{-1} J^T\, dP)}$$

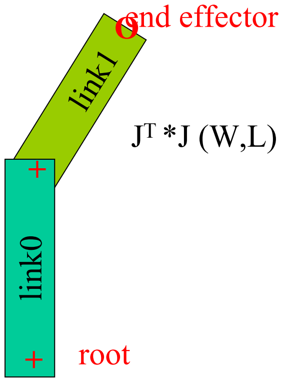
Soluzione regolarizzata (m=2, n=4)

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & -l_1 & 0 \\ l_1^2 + l_1 l_o \sin 45 & l_1^2 + l_o/2 + 2 l_1 l_o \sin 45 + l_o^2/2 & -l_1 - l_0 \sin 45 & -l_0 \cos 45 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 \cos 45 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x = V'W^{-1}U'b}$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$ $\quad \det(J^T * J) = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\quad dP^e_x = 1$ $\quad dP^e_y = 0$ $\quad \lambda = 1$ $\quad \det(J^T * J + C) \neq 0$



$$J^T * J\ (W,L) + C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Esempio regolarizzazione con pesi uguali

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

$l_0 = l_1 = 2$ $\quad dP^e_x = 1$ $\quad dP^e_y = 0$

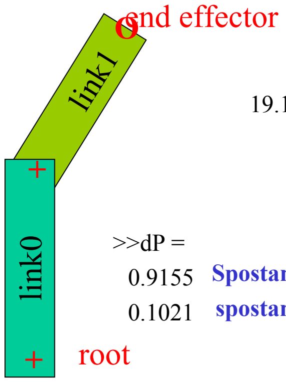
$\boxed{x = V'W^{-1}U'b}$

Supponiamo: c1 = c2 = c3 = c4 = 1

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

>>det = 47.3137

Soluzione con regolarizzazione con pesi unitari



>>Ws =

19.1915	0	0	0
0	2.4653	0	0
0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000

>>dW =

-0.1691
-0.1443
0.0845
-0.1021

>>dP =

0.9155
0.1021

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato

||dW|| = 0.2588, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Esempio regolarizzazione con pesi non uguali

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+c_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+c_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+c_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+c_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

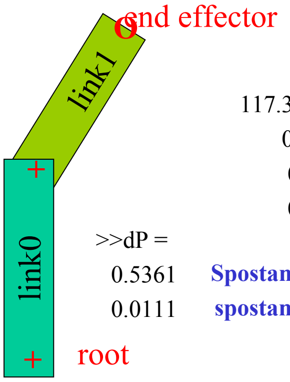
$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$x = V'W^{-1}U'b$

Supponiamo: c1 = c2 = 100; c3 = c4 = 1

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

>>det = 4.3539e+004



Soluzione con regolarizzazione con pesi non uguali

>>Ws2 =

117.3406	0	0	0
0	100.4701	0	0
0	0	1.9953	0
0	0	0	1.8510

>>dW =

-0.0093
-0.0157
0.4639
-0.0111

>>dP =

0.5361
0.0111

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato

||dW|| = 0.4644, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Esempio regolarizzazione più corretto

$$J^T * J + C = \begin{bmatrix} 4+p_1 & 4+2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 4+2\sqrt{2} & 7+4\sqrt{2}+p_2 & -2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -2-\sqrt{2} & 1+p_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1+p_4 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$ / $T_x = T_y = 0$

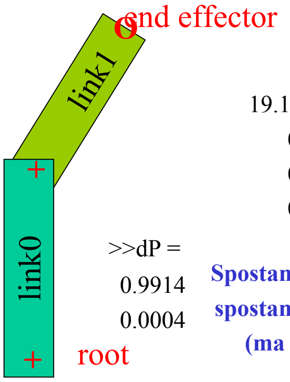
$l_0 = l_1 = 2$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

$\det(J^T * J + C) \neq 0$

$x = V'W^{-1}U'b$

Supponiamo: c1 = c2 = 1; c3 = c4 = 0.01 . Ruolo di λ

>>det = 1.1992



>>Ws2 =

19.1398	0	0	0
0	1.9568	0	0
0	0	0.5185	0
0	0	0	0.0618

>>x

-0.0172
-0.0288
0.8589
-0.0403

>>dP =

0.9914
0.0004

Spostamento ottenuto ≠ spostamento desiderato (ma molto vicino)

||dW|| = 0.8605, ma alla funzione costo partecipa anche il costo di non essere riusciti ad arrivare al punto [1 0].

Inoltre il costo considerato nel funzionale di minimizzazione viene diviso per 100 per le componenti di dTx e dTy

Sommario

- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sottodeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Privilegio di gradi di libertà di controllo.