Stima ai minimi quadrati e cinematica inversa – peso degli end point

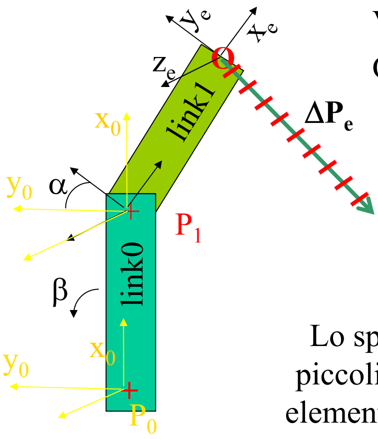
Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Robotica ed Animazione Digitale.

Sommario

- Cinematica inversa
- Sistemi lineari di n equazioni in n incognite
- Determinazione dei parametri liberi in sistemi quadrati
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sovradeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Diversa importanza ai gradi di libertà dell'end point

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Come vengono trattate le velocità

Dividendo entrambi i membri per Δt si ottiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{\Theta}}$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

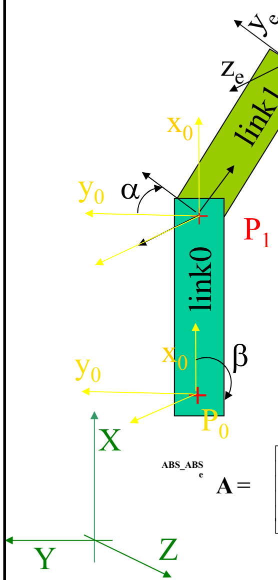
Elemento chiave è il Jacobiano, **J**.

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

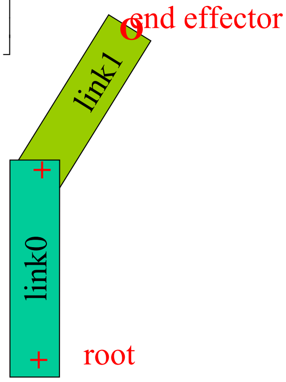
L'espressione analitica di J vale ∀valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Cinematica diretta



$$^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{\quad\ \ e}\mathbf{A}\ {}^{P0\_L0}\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta + T_x \\ -(l_1 \cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha \cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$${}^{ABS\_ABS}_{\quad\ \ e}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & 0 & l_1\cos(\alpha+\beta) + l_0\cos\beta + T_x \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il Jacobiano

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$.

J

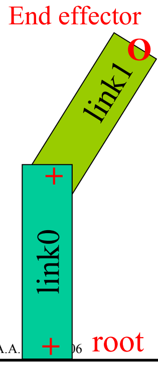
Chiamiamo **$W_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$** il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{W_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{W_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{W_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{W_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

Il Jacobiano dell'esempio

$$
{}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & 0 & l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta+T_x \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta+T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin\alpha\cos\beta - l_1\cos\alpha\sin\beta & -l_1\cos\alpha\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta - l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ +l_1\sin\alpha\sin\beta - l_1\cos\alpha\cos\beta & -l_1\cos\alpha\cos\beta + l_1\sin\alpha\sin\beta - l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$



$$
= \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Cinematica inversa attraverso il Jacobiano

$\mathbf{V}_e = \mathrm{J}(\mathbf{Z}, \mathbf{L})\ \mathbf{dZ}/\mathrm{dt}$ Esempio: $\mathbf{V} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Theta}}$

Consideriamo **Z(t)**= [A(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi.

Possiamo ricavare d**Z/dt come:**

dZ/dt = J^{-1}(**Z, L**) d$\mathbf{P}_e$**?**

E' un sistema lineare.

Sommario

- Cinematica inversa
- Sistemi lineari di n equazioni in n incognite
- Determinazione dei parametri liberi in sistemi quadrati
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sovradeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Diversa importanza ai gradi di libertà dell'end point

I sistemi lineari

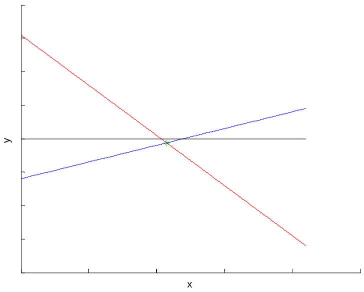
$d\mathbf{P_e}/dt = J(\mathbf{Z}, \mathbf{L})\, d\mathbf{Z/dt}$ **b = AX**

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

A – matrice dei coefficienti
b – vettore dei termini noti.
x – vettore delle incognite.

Esempio

$y = x + 2$
$y = -3x + 1$



$1\ x_1\ - 1\ x_2 = -2$
$-3\ x_1 - 1\ x_2 = -1$

$x_1 = x$
$x_2 = y$

Scrivo il sistema lineare: $Ax = b$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Soluzione dei sistemi lineari

AX = b

X è una soluzione se soddisfa tutte le equazioni del sistema stesso.

Soluzioni:
- ! ∃ Soluzione (sistema impossibile)
- ∃ Soluzione (sistema possibile)
  - 1 soluzione (sistema determinato)
  - > 1 soluzione (∞^k soluzioni – sistema indeterminato).

Sistemi lineari quadrati

AX = b **A di dimensioni n x n**

$(A^{-1} A) X = A^{-1} b$ $X = A^{-1} b$

Matrice dei complementi algebrici

$A^{-1} = [1/\det(A)]\, A^*$

$$A^* = \begin{bmatrix} A^+_{11} & A^+_{21} & . & . & A^+_{N1} \\ A^+_{12} & A^+_{22} & . & . & A^+_{N2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ A^+_{1N} & A^+_{2N} & . & . & A^+_{NN} \end{bmatrix}$$

$A^+_{ij} = (-1)^{i+j} \underbrace{\det(A^{\S}ij)}_{\text{Minore complementare}}$

$A^{\S}$ è ottenuta da A sopprimendo la riga i e la colonna j

$\det(A) = \sum_k a_{rk} A^+_{rk}$

Soluzione di sistemi lineari quadrati

$(A^{-1} A) X = A^{-1} b$ $X = A^{-1} b$

Condizione di esistenza dell'inversa è $\det(A) \neq 0$

Il sistema ammette 1 ed 1 sola soluzione se $\det(A) \neq 0$

Altrimenti: nessuna o infinite soluzioni

Rango di una matrice

det ($A^{§}ij$) Minore complementare

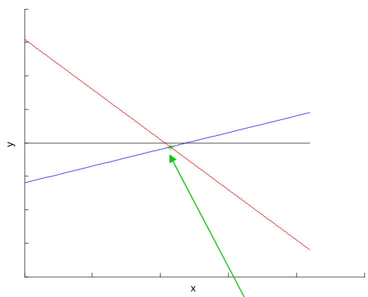
Data una matrice A di ordine n (n x n),

una matrice A n x n ha rango m < n se e solo se esiste un suo minore di ordine m non nullo mentre sono nulli tutti i minori di ordine m + 1.

Una matrice A n x n ha rango n (rango pieno) se e solo se il suo determinante è diverso da 0

Esempio

$y = x + 2$
$y = -3x + 1$



$1\,x_1 - 1\,x_2 = -2$
$-3\,x_1 - 1\,x_2 = -1$

$x_1 = x$
$x_2 = y$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

det(A) = 1(-1)-(-1)(-3)=-1-3=-4

$\boxed{\text{Rango di A è pieno}}$

$x_1 = 3/4$
$x_2 = -5/4$

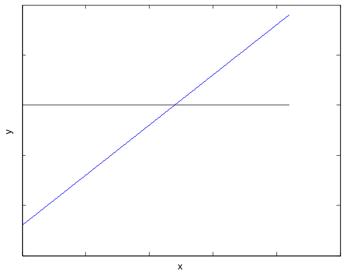
$P = A^{-1}\,b$

P = [3/4 -5/4]

Esempio di soluzione non univoca

$1\ x_1 - 1\ x_2 = -2$
$2\ x_1 - 2\ x_2 = -4$

$y = x + 2$
$2y = 2x + 4$



$x_1 = x$
$x_2 = y$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 1(-2)-(-1)(2)=-2+2=0$

La soluzione non è unica: tutti i punti della retta soddisfano contemporaneamente le 2 equazioni

Risoluzione di un sistema 2x2

$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}*a_{22}-a_{12}*a_{21}$

Sommario

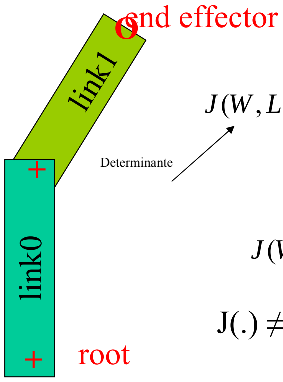
- Cinematica inversa
- Sistemi lineari di n equazioni in n incognite
- Determinazione dei parametri liberi in sistemi quadrati
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sovradeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Diversa importanza ai gradi di libertà dell'end point

Il Jacobiano dell'esempio semplificato

$$^{\mathbf{ABS\_ABS}}_{\mathbf{e}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta + T_x \\ -(l_1 \cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha \cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il caso piano (x,y) e Tx ≡ Ty ≡ 0 e coordinate non omogenee.

$$\mathbf{J(W,L)} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$



$$J(W,L) = l^2_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l^2_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) - l_o l_1 \sin\beta \cos(\alpha+\beta)$$

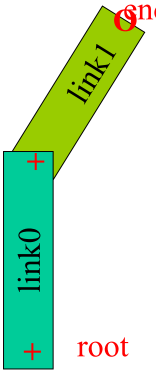
$$J(W,L) = l_o l_1 \sin(\alpha+\beta)\cos(\beta) - l_o l_1 \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$J(.) \neq 0 \qquad \begin{cases} \alpha + \beta \neq 0 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + \beta \neq 90 \pm 180 \\ \beta \neq 0 \pm 180 \end{cases}$$

Il Jacobiano dell'esempio semplificato

$$^{ABS\_ABS}{}_{e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1\cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1\sin\alpha\sin\beta + T_x \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il caso piano e Tx ≡ Ty ≡ 0



Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

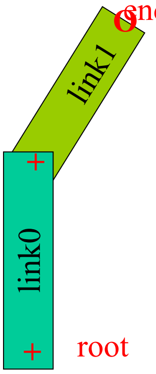
$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -2 & -2-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\det(J) = 2\sqrt{2}$

Il Jacobiano dell'esempio semplificato

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 45$ - $l_0 = l_1 = 2$ $dP = [1\ 1]$




```
>>invJ =
-0.5000    1.2071
      0   -0.7071
```

$X = J^{-1} * b$

```
>>X =
   1.4142
  -1.4142
```

$J * X = dP$

Caso indeterminato

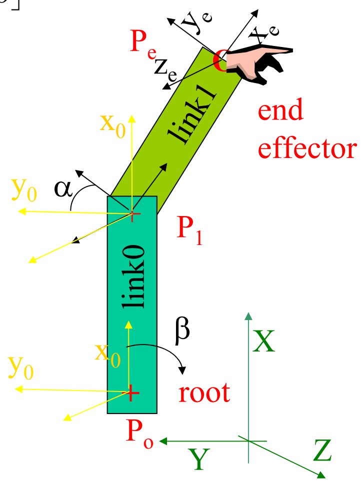
$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $W_k = [0, 0]$

$$J(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t), \mathbf{L}) \Delta W$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$



J(.) = 0 Sistema indeterminato

$P\text{-}P_x = 0$

$P\text{-}P_y = -l_0\alpha - (l_0+l_1)\,\beta$ →

$P\text{-}P_x = 0$

$\alpha = \alpha \quad \beta = [(P\text{-}P_y) + l_0\alpha] / -(l_0+l_1)$

Sommario

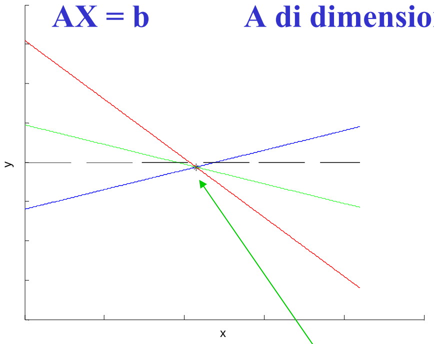
- Cinematica inversa
- Sistemi lineari di n equazioni in n incognite
- Determinazione dei parametri liberi in sistemi quadrati
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sovradeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Diversa importanza ai gradi di libertà dell'end point

Sistemi lineari con m > n

J(W,L) è rettangolare: numero di righe maggiore del numero di colonne

AX = b **A di dimensioni m x n**

y = x + 2
y = -3x + 1
y = -x - 1/2



Una delle 3 righe di A è combinazione lineare delle altre.

P = [3/4 -5/4]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Esiste un'equazione "di troppo"

Nessuna, 1 o ∞ soluzioni

Rango di A è pieno

Soluzione approssimata generale

min || Ax -b || **AX = b** **A di dimensioni m x n**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1 &= \nu_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2 &= \nu_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - b_3 &= \nu_3 \end{aligned}$$

Residuo

$$\min \sum_k \nu_k^2$$

min (Ax -b)^2 => $\mathbf{A^T(A\,X - b) = 0}$

$$\boxed{\mathbf{X = (A^T * A)^{-1} A^T * b}}$$

Rank(A) = Rank(C)

C = $(A^T*A)^{-1}$ è la matrice di covarianza
(matrice quadrata n x n)

Sistemi lineari con m > n

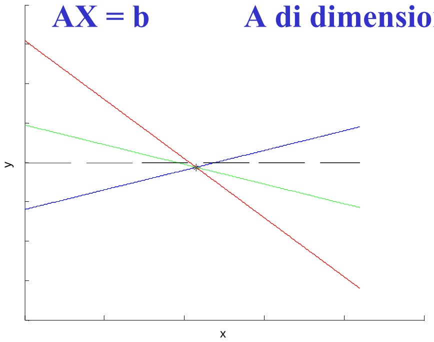
J(W,L) è rettangolare: numero di righe maggiore del numero di colonne

$y = x - 2$

$y = -3x + 1$

$y = -x - 1/2$

AX = b **A di dimensioni m x n**



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ +0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det = 24$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.1250 \\ -0.1250 & 0.4583 \end{bmatrix} \qquad P = C * A^T * b$$

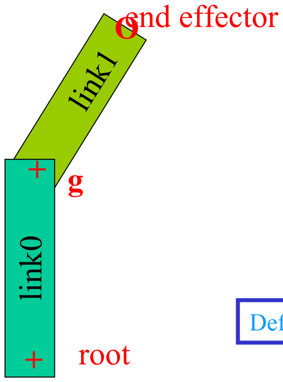
P = [0.75 -1.25]

Esempio

$${}^{ABS\_ABS}_{\;\;\;\;\;\;\;\;\;e}P = \begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta + T_x \\ -(l_1 \cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha \cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo coordinate omogenee e caso piano (xy)

$${}^{ABS\_ABS}_{\;\;\;\;\;\;\;\;\;g}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos\beta \\ l_1 \sin\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \\ 0 & -l_o \sin\beta \\ 0 & l_o \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = 0 \quad \beta = \{0, 90^o\}$$

Definiamo la traiettoria dell'end effector <u>e</u> il joint <u>g</u>

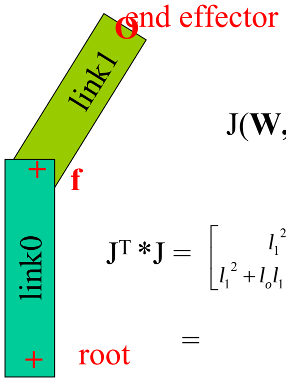
Esempio (m = 4, n = 2)

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta \\ 0 & -l_o\sin\beta \\ 0 & l_o\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b$$

$$b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix}$$

4 x 1   2 x 1



$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1-l_0\sin 45 \\ 0 & -l_0\cos 45 \\ 0 & -l_o\sin 45 \\ 0 & l_o\cos 45 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$

$$J^T * J = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2 \\ l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2 & (-l_1 - l_o\sin 45)^2 + (l_o\cos 45)^2 + (l_0\sin 45)^2 + (l_0\cos 45)^2 \end{bmatrix} =$$

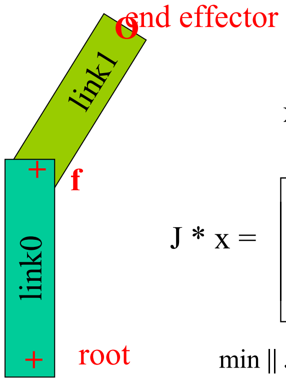
$$= \begin{bmatrix} 4 & 4+2\sqrt{2} \\ 4+2\sqrt{2} & 12+4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2)

$$x = (J^T * J)^{-1} * J^T * b \qquad b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$ $dP^e_x = 1$ $dP^e_y = 0$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$ $dP^f_x = 1$ $dP^f_y = 0$



$$C = (J^T * J)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 6.8284 \\ 6.8284 & 17.6568 \end{bmatrix}$$

$$x = C * J^T * b = \begin{bmatrix} -0.0976 \\ -0.2357 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

$$J * x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dP_{e_x} \\ dP_{e_y} \\ dP_{f_x} \\ dP_{f_y} \end{bmatrix}$$

che è diverso
dal valore desiderato

$$\min \| Jx - b \| = 0.3333^2 + 0.6666^2 + 0.3333^2$$

Sommario

- Cinematica inversa
- Sistemi lineari di n equazioni in n incognite
- Determinazione dei parametri liberi in sistemi quadrati
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sovradeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Diversa importanza ai gradi di libertà dell'end point

Come privilegiare alcuni gradi di libertà

$\min \| P(Ax - b) \|$ **PAX = Pb** **A di dimensioni m x n**

P di dimensioni m x m – matrice dei pesi, diagonale

$p_1a_{11}x_1 + p_1a_{12}x_2 - p_1b_1 = \nu_1$
$p_2a_{21}x_1 + p_2a_{22}x_2 - p_2b_2 = \nu_2$ Residuo $\min \sum_k \nu_k^2$
$p_3a_{31}x_1 + p_3a_{32}x_2 - p_3b_3 = \nu_3$

$\mathbf{A^T PA\, X = A^T P\, b}$

$\boxed{\mathbf{X = (A^T P A)^{-1} A^T P\, b}}$ Rank(A) = Rank(C)

C = $A^T * P * A$ è la matrice di covarianza

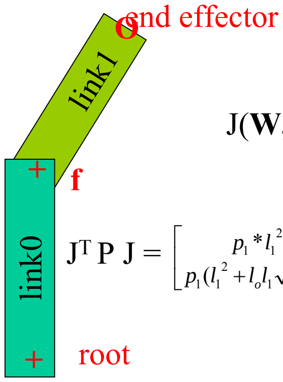
(matrice quadrata n x n)

Esempio (m = 4, n = 2)

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta \\ 0 & -l_o\sin\beta \\ 0 & l_o\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$x = (J^T * P * J)^{-1} * J^T P * b$$

$$b = \underset{4 \times 1}{\begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix}} \qquad x = \underset{2 \times 1}{\begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix}}$$



$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_1-l_0\sin 45 \\ 0 & -l_0\cos 45 \\ 0 & -l_o\sin 45 \\ 0 & l_o\cos 45 \end{bmatrix}$$

Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^o$

$$J^T P J = \begin{bmatrix} p_1 * l_1^2 & p_1(l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2) \\ p_1(l_1^2 + l_o l_1\sqrt{2}/2) & p_1[(-l_1 - l_o\sin 45)^2] + p_2(l_o\cos 45)^2 + p_3(l_0\sin 45)^2 + p_4(l_0\cos 45)^2 \end{bmatrix}$$

Esempio (m = 4, n = 2)

$$x = (J^T PJ)^{-1} * J^T P * b \qquad b = \begin{bmatrix} dP_e/dt \\ dP_f/dt \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \end{bmatrix}$$

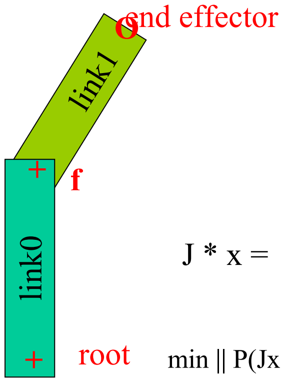
Supponiamo: $\alpha = \beta = 45^\circ$

Supponiamo: $l_0 = l_1 = 2$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$dP^e_x = 1$ $\qquad dP^e_y = 0$

$dP^f_x = 1$ $\qquad dP^f_y = 0$



$$(J^T PJ) = \begin{bmatrix} 40 & 68.284 \\ 68.284 & 140.568 \end{bmatrix}$$

$$x = C * J^T * b = \begin{bmatrix} -0.3994 \\ -0.0589 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

$$J * x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dP_{e_x} \\ dP_{e_y} \\ dP_{f_x} \\ dP_{f_y} \end{bmatrix}$$

più vicino
al valore desiderato per il punto E e meno per il punto F

$$\min \| P(Jx - b) \| = (0.0833*10)^2 + 0.0833^2 + 0.0833^2$$

Privilegio di alcuni gradi di libertà dell'end point

$x = (J^T PJ)^{-1} * J^T P * b$ $\qquad\qquad$ $J X = b$

Attraverso P posso influenzare la soluzione
(vincolo soft sul movimento)

Sistema lineare: soluzione robusta

A X = B ⟹ **A' A X = A' B** ⟹ **X = (A'A)$^{-1}$A'B**

Numero di condizionamento varia circa con (A'*A).

Soluzione tramite Singular Value Decomposition

Numero di condizionamento varia circa con A.

A X = B

U W V X = B

$\boxed{\mathbf{x = V'W^{-1}U'b}}$

Ortonormale M x N $\quad$ Diagonale (N x N) $\quad$ Ortonormale N x N

$\mathbf{V^T W^{-1} U^T U W V X = V^T W^{-1} U^T B}$ ➔ $\mathbf{X = V^T W^{-1} U^T B}$

- La matrice C non viene formata.
- W^{-1} contiene i reciproci degli elementi di W.

W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$

Sommario

- Cinematica inversa
- Sistemi lineari di n equazioni in n incognite
- Determinazione dei parametri liberi in sistemi quadrati
- Sistemi lineari con m equazioni e n incognite (m > n) (sistemi sovradeterminati). Soluzione ai minimi quadrati.
- Privilegio di gradi di libertà dell'end point