La cinematica Inversa

Prof. Alberto Borghese

N.B.: Il diritto di scaricare questo file è riservato solamente agli studenti regolarmente iscritti al corso di Robotica ed Animazione Digitale.

Riassunto

- La cinematica inversa
- Il Jacobiano
- Esempi ed osservazioni

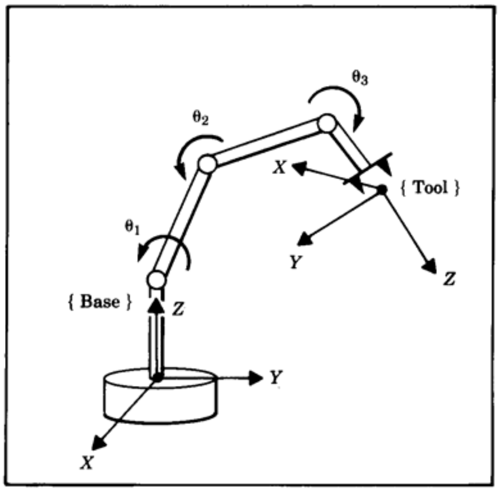
Cinematica diretta e inversa

Conosco il valore dei joint (angolo o offset) ➔ posizione ed orientamento dell'end-point.

Dallo spazio dei joint allo spazio degli end-point.

Conosco la posizione e l'orientamento dell'end-point ➔ devo determinare il valore dei joint.

Dallo spazio dell'end-point allo spazio dei joint.



La cinematica viene descritta come sequenza di posizioni.

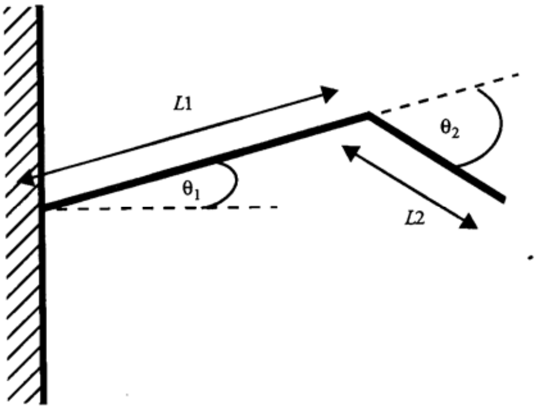
La cinematica inversa

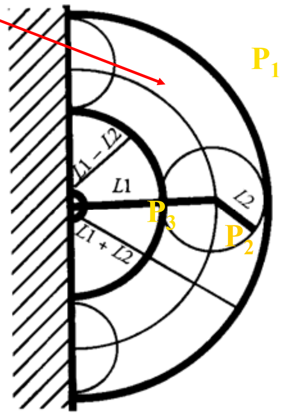
Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.

Problema sotto-determinato (over-constrained).
Comportamento stereotipato. Perché?

Soluzione diretta

Working space





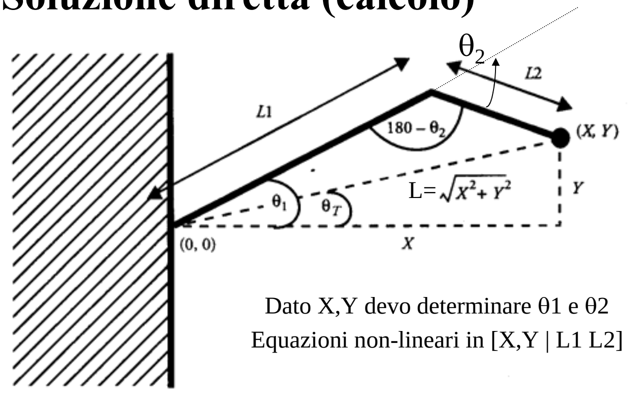
Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \leq \| P \| \leq L_1 + L_2$

Possibili configurazioni:
P_1 - nessuna soluzione.
P_2 - due soluzioni.
P_3 - una soluzione.

Caratteristiche della cinematica inversa

- Soluzione di equazioni non-lineari.
- Workspace (spazio nel quale si può posizionare l’end-effector).
- Dexterous workspace. Spazio nel quale si può posizionare l’end-effector con un qualsiasi orientamento.
- C.N. Per potere raggiungere una qualsiasi posizione ed orientamento nello spazio di lavoro, è che il numero di gradi di libertà dei segmenti del braccio robotico sia almeno uguale al numero di gradi di libertà dell’end-point.
- Soluzione geometrica od analitica complessa da determinare.

Soluzione diretta (calcolo)

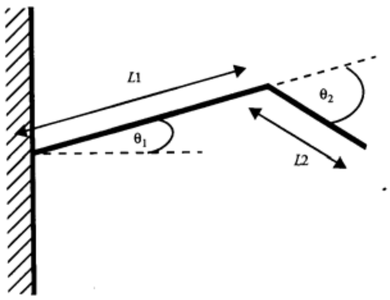


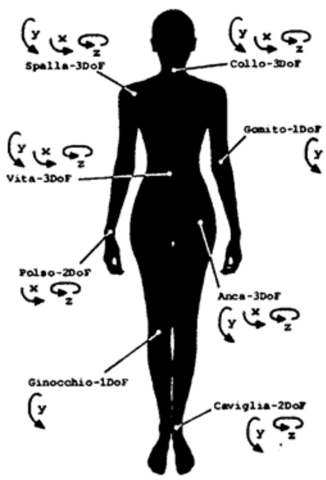
Dato X,Y devo determinare θ1 e θ2
Equazioni non-lineari in [X,Y | L1 L2]

E' un problema di trigonometria!

- Calcolo $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$
- Teorema di Carnot per calcolare $\cos\theta_2$: $\cos(\vartheta_2) = (L_1^{\ 2} + L_2^{\ 2} - L^2)/(2L_1L_2)$
- Calcolo di $\cos\theta_T$: $\cos(\vartheta_T) = X/\sqrt{X^2 + Y^2}$
- Teorema di Carnot per calcolare $\cos(\theta_1 - \theta_T)$: $\cos(\vartheta_R) = (L_1^{\ 2} + L^2 - L_2^{\ 2})/(2L_1L)$

Cerniere 3D



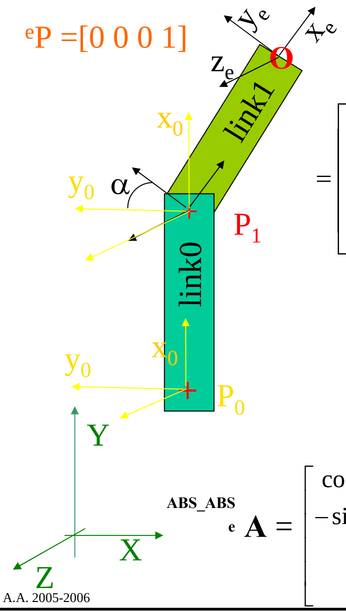


∞^1 soluzioni
NB: gli umani ne scelgono una sola.

Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.

Posizione dei segmenti: fattorizzazione

$^{e}P = [0\ 0\ 0\ 1]$



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{\ \ \ \ \ \ \ \ e}\mathbf{A}\ {}^{e}\mathbf{P} =$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha+\beta) + l_0 \cos\beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

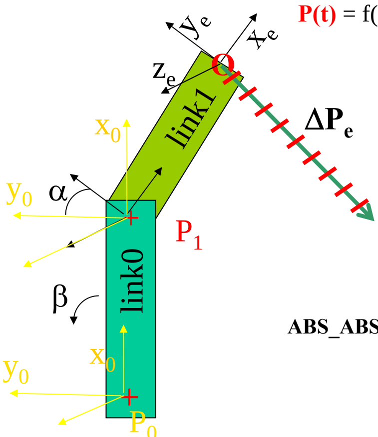
Dovrei determinare P funzione di a, b, Tx,Ty??

$$^{ABS\_ABS}_{\ \ \ \ \ \ \ \ e}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & 0 & l_1\cos(\alpha+\beta)+l_0\cos\beta+T_x \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta+T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), $T_x(t)$, $T_y(t)$| l_0, l_1).

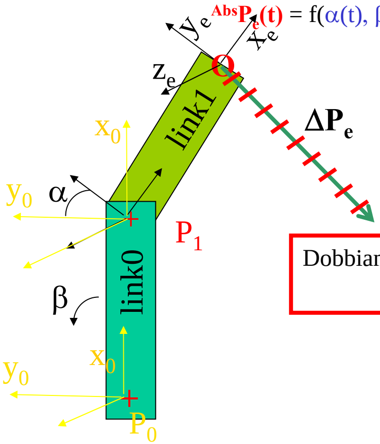


$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}\ (\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0 \cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0 \sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione differenziale

Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

$^{Abs}P_e(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^{e}_{Abs}A(t)\, {}^{e}P_e(t)$



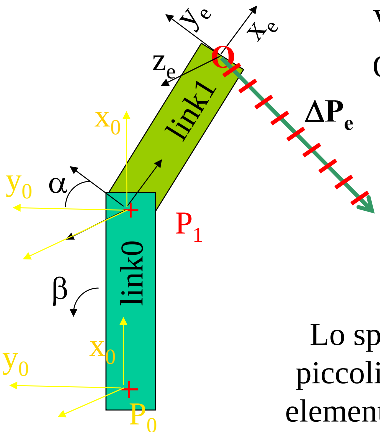
$$^{ABS\_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t)+\beta(t)) + l_0 \cos\beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t)+\beta(t)) - l_0 \sin\beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
$\alpha(t) = f^*(l_0, l_1, P_e(t))$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!

Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.

Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Riassunto

- La cinematica inversa
- Il Jacobiano
- Esempi ed osservazioni

Sviluppo in serie di Taylor di funzioni di più variabili

z = f(x,y)

$$z - z_o = \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P=P_0} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P=P_0} dy}_{\text{Parte lineare}} + \frac{1}{2}\left\{ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P=P_0} dx^2 + 2\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P=P_0} + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P=P_0} dy^2 \right\} + \ldots$$

Sistema di equazioni lineari

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

Chiamiamo **$\mathbf{W}_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$** il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$P_x - P_{x_k} = \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{y_k})$$

$$P_y - P_{y_k} = \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{y_k})$$

$$P_z - P_{z_k} = \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k}(\alpha-\alpha_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k}(\beta-\beta_k) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_x - T_{xk}) + \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k}(T_y - T_{y_k})$$

Il Jacobiano

Consideriamo la trasformazione **diretta** joint -> end_point.

P(t) = f(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)| l_0, l_1).

$P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.
$P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1)$.

J

Chiamiamo **$\mathbf{W}_k = [\alpha_k, \beta_k, T_{xk}, T_{yk}]$** il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Caratteristiche del Jacobiano

$$
\begin{bmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{w}_k} & \cdots \\
\left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{w}_k} & \cdots \\
\left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{w}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{w}_k} & \cdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}
$$

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale ∀valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Come vengono trattate le velocità

Dividendo entrambi i membri per Δt si ottiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{\Theta}}$$

Cinematica dell' End-effector

Cinematica dei Joint

Elemento chiave è il Jacobiano, **J**.

Contiene le derivate parziali di f(.) rispetto a <u>tutti</u> i <u>parametri liberi</u>.

Le derivate sono calcolate nel "punto di lavoro".

L'espressione analitica di J vale ∀valore dei parametri liberi, ma il valore assunto da J varia in funzione dei parametri liberi.

Jacobiano e velocità

d$\mathbf{P_e}$**(t)** = J(**W(t)**, **L**) d**W(t)** ➔ d$\mathbf{P_e}$**(t)** / dt = J(**W(t)**, **L**) d**W(t)** / dt

Chiamiamo **W(t**$_k$**)**= [A(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi all'istante t_k.

$$\boxed{V_{\mathbf{P_e}}(t_k) = J(\mathbf{W}(\mathrm{t}_k), \mathbf{L})\dot{W}(\mathrm{t}_\mathrm{k})}$$

Parametri liberi Parametri geometrici

∀k, cambia il valore di J, l'espressione analitica rimane valida.

Osservazioni sul Jacobiano

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_x(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_y(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \\ \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_x}\right|_{\mathbf{W}_k} & \left.\frac{\partial f_z(.)}{\partial T_y}\right|_{\mathbf{W}_k} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_k \\ \beta - \beta_k \\ T_x - T_{x_k} \\ T_y - T_{y_k} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

Δ$\mathbf{P_e}$**(t)** = J(**W(t)**, **L**)Δ**W(t)**

Chiamiamo $\mathbf{W_k}$**(t)**= [A(α(t), β(t), T_x(t), T_y(t)] il valore dei parametri liberi all'istante di tempo k

E' un'equazione alle differenze (matriciale) lineare dallo spazio dei parmetri liberi a quello dell'end-point: Δ**W(t)** -> Δ$\mathbf{P_e}$**(t)**

Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta!

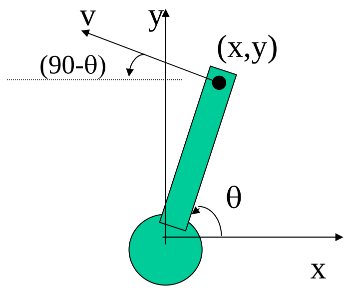
Riassunto

- La cinematica inversa
- Il Jacobiano
- Esempi ed osservazioni

Esempio di determinazione del Jacobiano

x = r cos(θ)

y = r sin(θ)



$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$

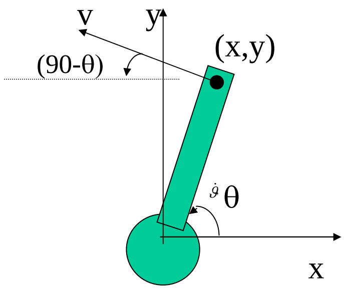
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$

$\mathbf{V} = \omega \Lambda \mathbf{r}$ Sono due espressioni equivalenti ∀k $\mathbf{V} = \mathbf{J}_{\theta=\theta k} \dot{\mathbf{\Theta}}$

$\mathbf{V}_{2x1}$ $\mathbf{J}_{2x1}$ $\dot{\mathbf{\Theta}}_{1x1}$

Esempio di determinazione del Jacobiano

$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$

$\theta_k = 0$

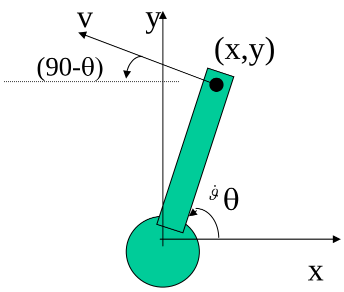
$V_x = -r \sin(0)\ \dot{\vartheta} \quad = 0$

$V_y = r \cos(0)\ \dot{\vartheta} \quad = r\ \dot{\vartheta}$

$$\mathbf{V} = \omega \Lambda \mathbf{r} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio di determinazione del Jacobiano

$$\dot{\vartheta} \Rightarrow v$$



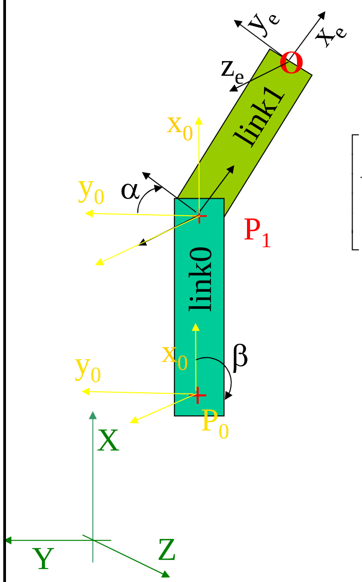
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{bmatrix}_{\vartheta=\vartheta_k} \dot{\vartheta}$$

$V_x = -r \sin(\theta_k)\ \dot{\vartheta}$

$V_y = r \cos(\theta_k)\ \dot{\vartheta}$

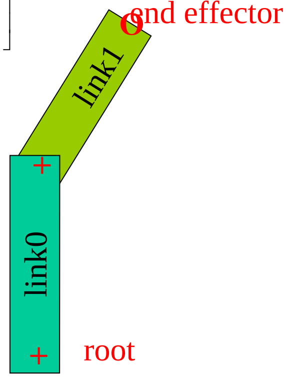
$$\mathbf{V} = \omega \Lambda \mathbf{r} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ r\cos\vartheta & r\sin\vartheta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin(\vartheta)\dot{\vartheta} \\ r\cos(\vartheta)\dot{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cinematica diretta



$${}^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{A}\ {}^{P0\_L0}\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1\cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1\sin\alpha\sin\beta + T_x \\ -(l_1\cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Il Jacobiano dell'esempio

$${}^{ABS\_ABS}_{\quad e}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & 0 & l_1\cos(\alpha+\beta) + l_0\cos\beta + T_x \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{J}(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin\alpha\cos\beta - l_1\cos\alpha\sin\beta & -l_1\cos\alpha\sin\beta - l_1\sin\alpha\cos\beta - l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ +l_1\sin\alpha\sin\beta - l_1\cos\alpha\cos\beta & -l_1\cos\alpha\cos\beta + l_1\sin\alpha\sin\beta - l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

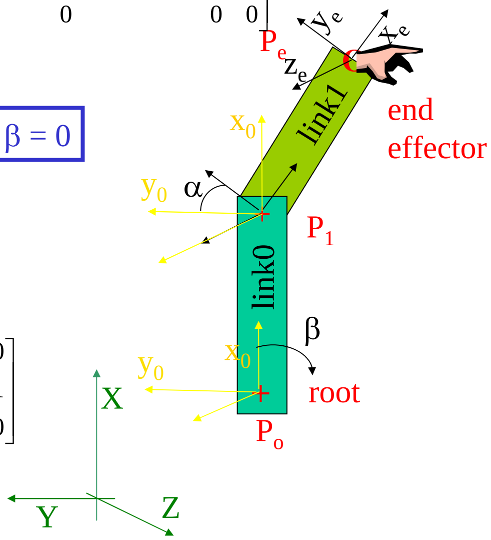
Esempio di calcolo dello spostamento – I

$$J(\mathbf{W,L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta)-l_0\sin\beta & 1 & 0 \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta)-l_0\cos\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

$W_k = [0, 0, P_{ox}, P_{oy}]$

$$J(\mathbf{W_k,L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1-l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Esempio di calcolo dello spostamento – II

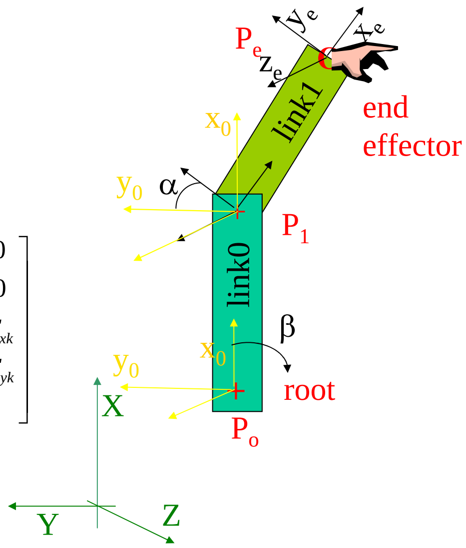
Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$

$$J(\mathbf{W_k,L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 & -l_1-l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(\mathrm{t}),\mathbf{L})\Delta W}$$

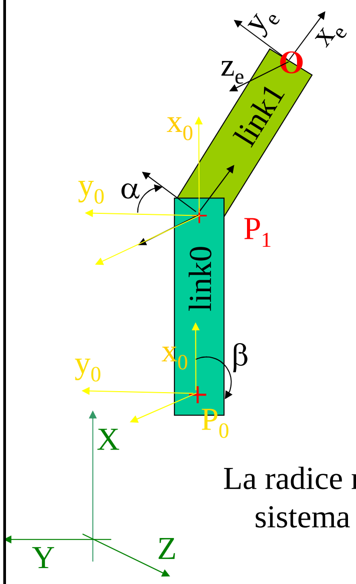
$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_0 & -l_0-l_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha-0 \\ \beta-0 \\ T_x - T_{xk} \\ T_y - T_{yk} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ -l_0\Delta a - (l_0+l_1)\Delta\beta + T_y \\ 0 \end{bmatrix}$$



Caso semplificato

Elimino 2 gradi di libertà: Tx e Ty.



$$ {}^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A}\ {}^{P0\_L0}\mathbf{P} = $$

$$\begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta \\ -(l_1 \cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha \cos\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La radice non si sposta rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Il Jacobiano dell'esempio semplificato

$$ {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos\alpha + l_0)\cos\beta - l_1 \sin\alpha \sin\beta \\ -(l_1 \cos\alpha + l_0)\sin\beta - l_1 \sin\alpha \cos\beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha+\beta) & -l_1 \sin(\alpha+\beta) - l_0 \sin\beta \\ -l_1 \cos(\alpha+\beta) & -l_1 \cos(\alpha+\beta) - l_0 \cos\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Non tutti gli spostamenti sono possibili

$$J(\mathbf{W},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\alpha+\beta) & -l_1\sin(\alpha+\beta) - l_0\sin\beta \\ -l_1\cos(\alpha+\beta) & -l_1\cos(\alpha+\beta) - l_0\cos\beta \end{bmatrix}$$

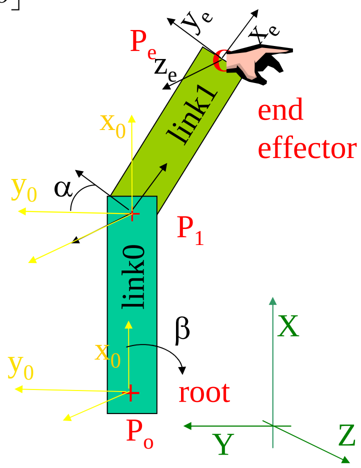
Caso particolare: $\alpha = \beta = 0$ $W_k = [0, 0]$

$$J(\mathbf{W_k},\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_1 - l_0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{P_e} = J(\mathbf{W_k}(t),\mathbf{L})\Delta W}$$

$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_0 & -l_0 - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - 0 \\ \beta - 0 \end{bmatrix}$$

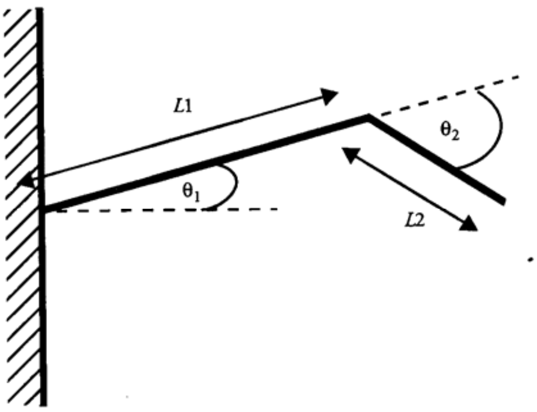
$$\begin{pmatrix} P_x - P_{x_k} \\ P_y - P_{y_k} \\ P_z - P_{z_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0\Delta a + (-l_0 + l_1)\Delta\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

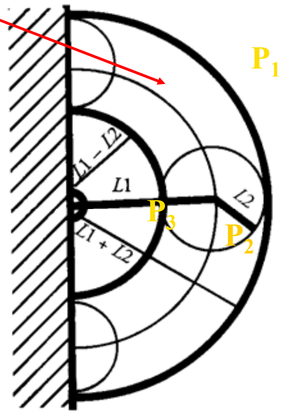


E' possibile spostarsi <u>solamente</u> in direzione perpendicolare al braccio (lungo la perpendicolare al braccio) per $\alpha = \beta = 0$

Soluzione diretta

Working space





Spazio di lavoro: $L_1 - L_2 \leq \|P\| \leq L_1 + L_2$

Possibili configurazioni:
P_1 - nessuna soluzione.
P_2 - due soluzioni.
P_3 - una soluzione.

Riassunto

- La cinematica inversa
- Il Jacobiano
- Esempi ed osservazioni