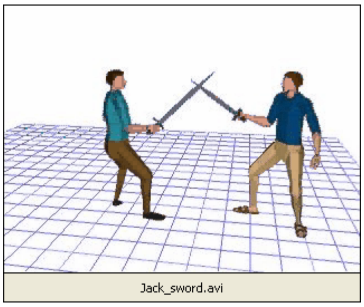
Movimentazione di scheletri

Corso di Robotica ed Animazione Digitale
Laurea Specialistica in Informatica

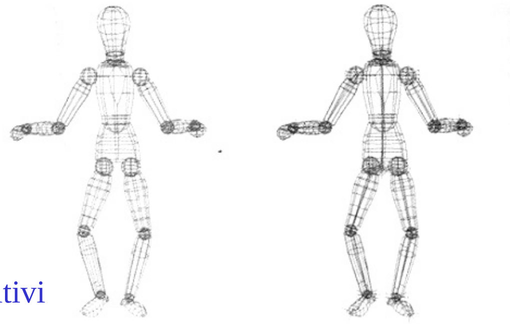
Università degli Studi di Milano
Prof. Alberto Borghese
Laboratorio di Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it



Sommario

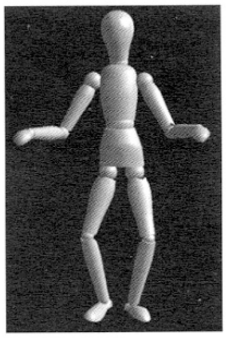
Gli avatar
Gli scheletri
Posizione dei segmenti nello spazio
La cinematica diretta

Gli Avatar



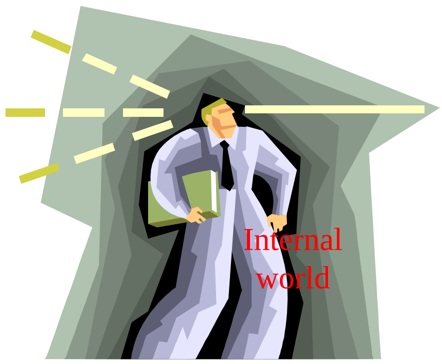
Fattori cognitivi

Generazione del movimento



Verso gli AVATAR

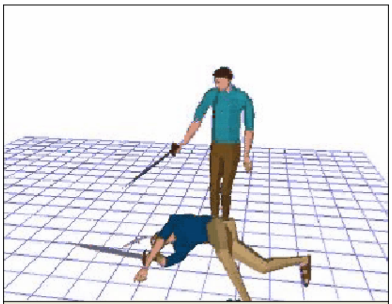
•Sono secondo etimologia divinità discese da cielo.
•Comportamento autonomo.
•Personalità autonoma (comportamento che segue all'interazione con l'ambiente.



http://www.ccon.org/conf01/

AVATAR BEHAVIOR


Jack_ingresso_auto.avi


Jack_sword.avi

Jacks

Human
Animal

Cartoon
Best Bang for the Buck
(500 vertices or less)

Fantasy
Animation (may be combined with any of the previous categories)

http://www.plmsolutions-eds.com/products/efactory/jack/moviesandimages.shtml

Sommario

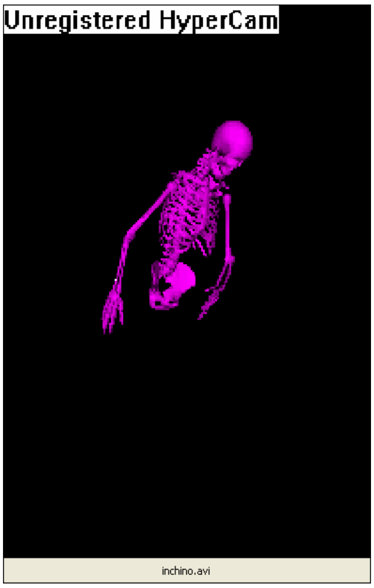
Gli avatar

Gli scheletri

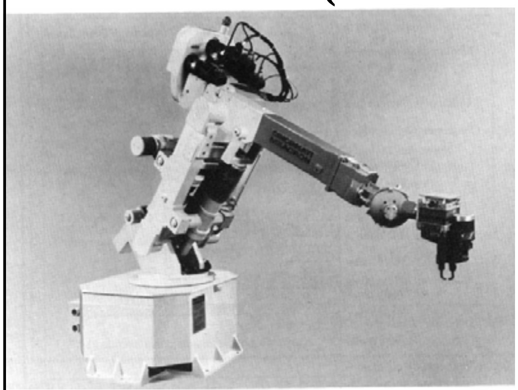
Posizione dei segmenti nello spazio

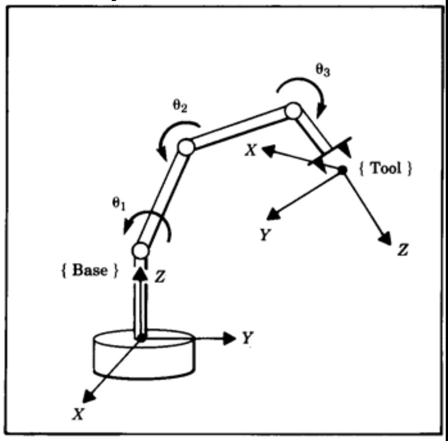
La cinematica diretta

Animazione mediante rotazioni



Descrizione della posizione (scheletro=robot)





Catena cinematica. **Struttura gerarchica.**

Posizione completamente definita dai gradi di libertà (movimenti concessi dai giunti articolari).

Frame. Sistema di riferimento connesso rigidamente con una parte del robot.

Joints and end-effector

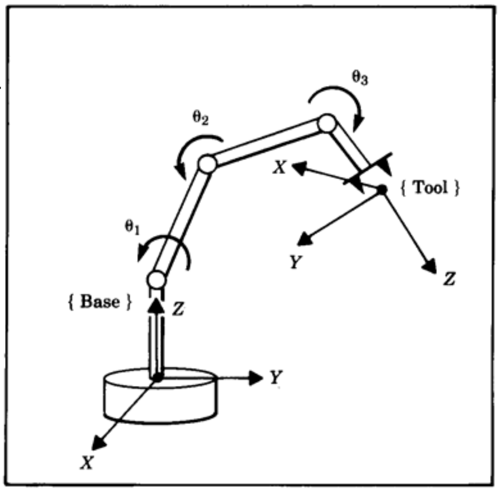
Il braccio è strumentale nel posizionamento ed orientamento dell'end-effector!

Tool frame viene associato all'*end-effector*.

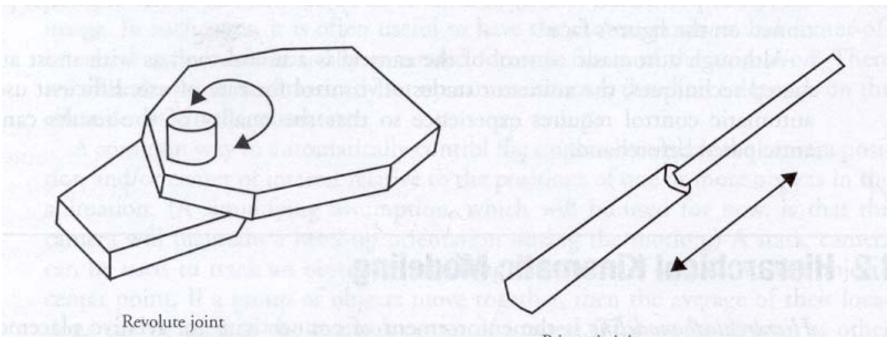
Il base frame (o *root node*) è il sistema di riferimento della catena cinematica.

Joint prismatici o rotatori (*nodes*).

I segmenti sono chiamati anche *link*.



Joint base



Rappresentazione grafica

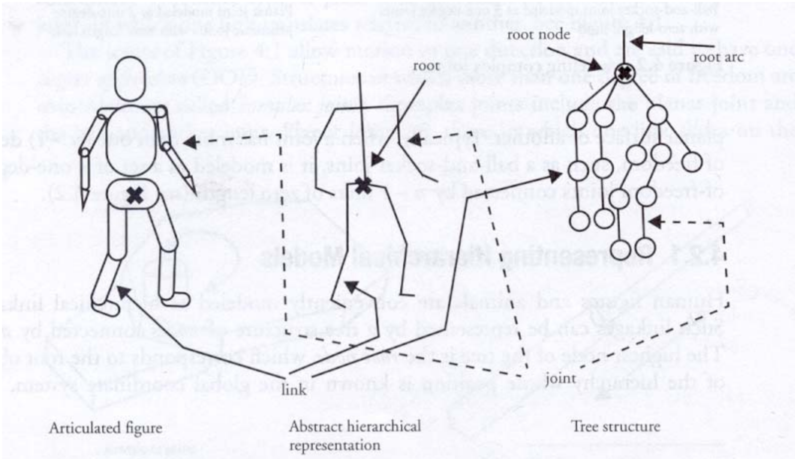
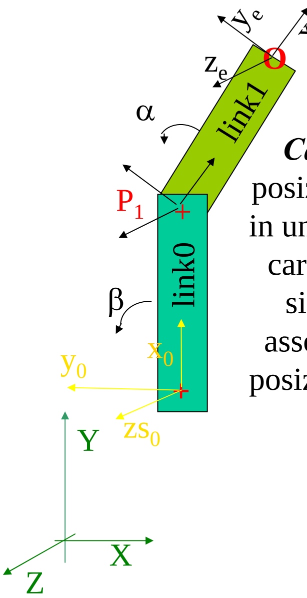


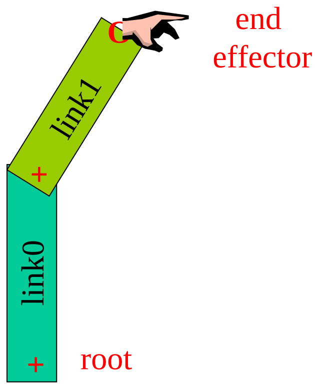
Figure 4.3 Example of a tree structure representing a hierarchical structure

Spazi di movimento



Joint space. E' lo spazio dei parametri liberi. In questo esempio: α e β.

Cartesian space. E' la posizione di punti, cerniere in un sistema di riferimento cartesiano, ad esempio il sistema di riferimento assoluto. In particolare la posizione dell'end-effector.



Descrizione della posizione

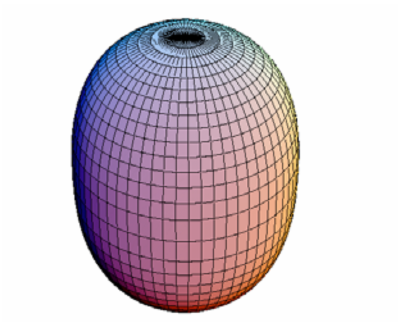
- Trasformazione da un frame all’altro.
- La trasformazione è funzione dei parametri liberi e dei parametri geometrici.
- Trasformazioni tra sistemi di riferimento: rototraslazione espressa mediante matrici affini (trasformazioni matriciali).

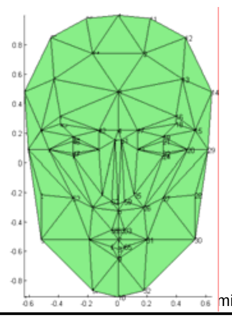
Sommario

Gli avatar
Gli scheletri
Posizione dei segmenti nello spazio (da SI)
La cinematica diretta

Descrizione della posizione di un corpo rigido (non solo scheletri)

- Punto materiale: **P** = **P**(t) – 3 dof
- Corpo rigido: 6 dof [**R**(t), **T**(t)].
- Corpo deformabile: N dof **G**(t)





Coordinate omogenee

Spazio delle classi di equivalenza: ogni punto in coordinate carteziane 3D corrisponde a infiniti punti nello spazio omogeneo 4D che differiscono solo per un fattore moltiplicativo *w*:

$$V(x, y, z) \text{ corrisponde a :}$$
$$V(X, Y, Z, w)$$

Il passaggio tra lo spazio omogeneo e lo spazio 3D:

$$x = X / w$$
$$y = Y / w$$
$$z = Z / w$$

solitamente si sceglie *w=1*

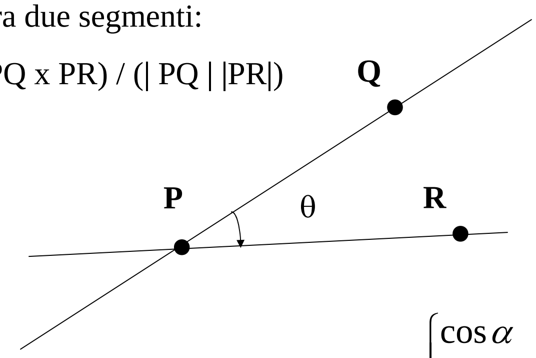
w = 0 identifica il punto all'∞ sulla retta per l'origine, passante per V.

I coseni direttori saranno x/|V|, y/|V|, z/|V|.

Rappresentazione di una retta nello spazio

Angolo tra due segmenti:

$\cos\theta = (PQ \times PR) / (|PQ|\,|PR|)$



$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \rho \begin{cases} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{cases}$$

Trasformazioni 3D

Traslazione – tutti i punti si spostano della stessa quantità (vettore spostamento). Di solito si considera la traslazione del baricentro.

Rotazione – tutti i punti lungo una retta chiamata asse non si spostano. Gli altri punti descrivono circonferenze perpendicolari all’asse.

Scala – variazione della dimensione lungo un asse.

Traslazione in coordinate omogenee

Vengono espresse come trasformazioni nello spazio di coordinate omogenee 4D come prodotto tra matrici.

Traslazione

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x + 0 + 0 + T_x)$$
$$y' = (0 + y + 0 + T_y)$$
$$z' = (0 + 0 + z + T_z)$$
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

coord. omogenee

$$x^t = x'/w' = (x + T_x)/1 = x + T_x$$
$$y^t = y'/w' = (y + T_y)/1 = y + T_y$$
$$z^t = z'/w' = (z + T_z)/1 = z + T_z$$

coord. cartesiane

Scala in coordinate omogenee

$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x.S_x + 0 + 0 + 0)$$
$$y' = (0 + y.S_y + 0 + 0)$$
$$z' = (0 + 0 + z.S_z + 0)$$
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

coord. omogenee

$$x^s = x'/w' = (x.S_x)/1$$
$$y^s = y'/w' = (y.S_y)/1$$
$$z^s = z'/w' = (z.S_z)/1$$

coord. cartesiane

Traslazione + Scala

$$V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V'' = SV' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traslazione Scala

$$V'' = S(TV) = (ST)V = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & T_x \\ 0 & S_y & 0 & T_y \\ 0 & 0 & S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

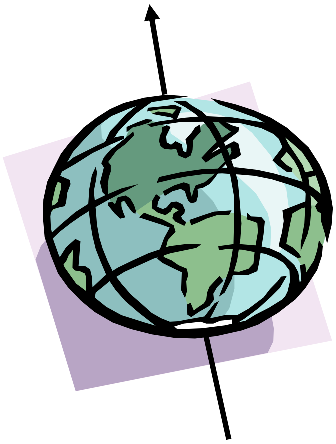
Fayttorizzazione delle trasformazioni: rappresentazione della trasformazione in un’unica matrice.

Traslazione + Scala

La rotazione

Ammette rappresentazioni diverse.

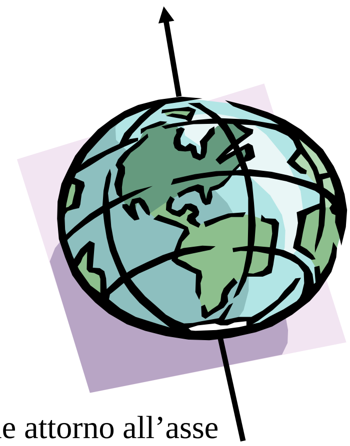
1) Quaternioni (asse + angolo)
2) Matrice di rotazione
3) Tre angoli di rotazione indipendenti



Quaternioni

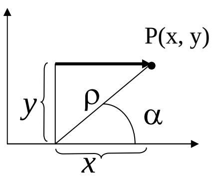
Rappresentazione della rotazione mediante: 1 vettore + 1 scalare

Asse di rotazione Angolo di rotazione



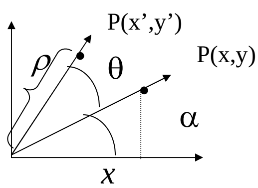
Si può dimostrare che data una rotazione attorno all'asse identificato dal versore **n**, di un angolo $-\pi <= \theta <= \pi$, questa può essere rappresentata dal quaternione: $q = (\cos \theta/2, \mathbf{n} \sin \theta/2)$

La rotazione attorno a *z (caso piano)*



$x = \rho \cos\alpha$

$y = \rho \sin\alpha$



$$x' = \rho \cos(\alpha+\theta) = \boxed{\rho \cos \alpha} \cos \theta + \boxed{\rho \sin \alpha} \sin \theta$$

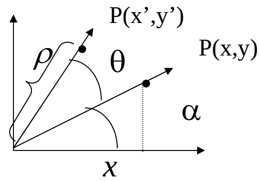
$$= x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = \rho \sin(\alpha+\theta) = -\rho \cos \alpha \sin \theta + \rho \sin \alpha \cos \theta$$
$$= -x \sin \theta + y \cos \theta$$

La rotazione attorno a *z (forma matriciale)*

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

P' = RP



Matrice di rotazione

$$\sum_{i=1}^{3} m^2_{ij} = 1$$

det(M) = 1

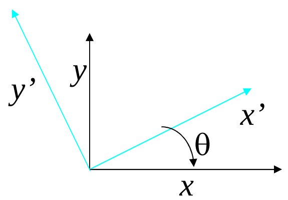
$$\sum_{i=1}^{3} m_{ij} m_{jk} = 0 \quad i \neq k$$

Matrice ortonormale

Significato geometrico della matrice di rotazione

Ruotiamo il sistema di riferimento xy in x'y' di un angolo -θ.

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Matrice di rotazione

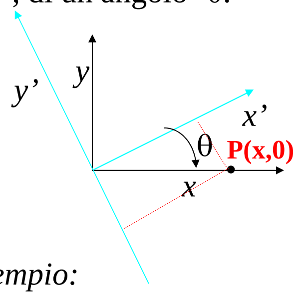
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M contiene la proiezione degli assi del sistema di riferimento xy sugli assi di x'y'.

Significato geometrico della matrice di rotazione

Consideriamo che il punto P -> P' sia un punto appartenente all'asse x, P(x,0) e che P' appartenga ad un asse x', ottenuto ruotando il sistema di riferimento xy in x'y', di un angolo $-\theta$.

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M contiene la proiezione degli assi (dei versori) del sistema di riferimento xy sugli assi di x'y' .

Esempio:

$x' = |P| \cos(-\theta) = x\cos(-\theta)$

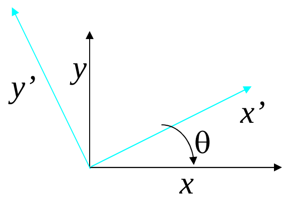
$y' = |P| \cos[-(90+\theta)] = -x\sin(\theta)$

Si può estendere a punti che non giacciano su uno dei due assi coordinati.

Matrice di rotazione e basi

Ruotiamo il sistema di riferimento xy in x'y' di un angolo $-\theta$.

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Matrice di rotazione

x' = a **x** + b**y** x' ha componenti solo lungo x'

y' = c**x** + d**y** y' ha componenti solo lungo y'

z' = **z** z' ha componenti solo lungo z'

Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)

$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

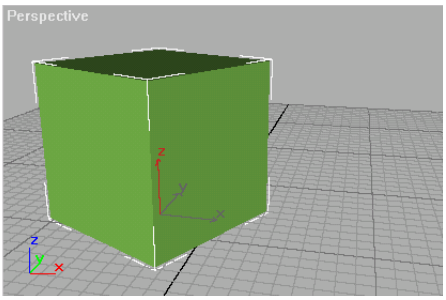
$$\begin{aligned} x' &= (x.\cos\theta + y.\sin\theta + 0 + 0) \\ y' &= (-x.\sin\theta + y.\cos\theta + 0 + 0) \\ z' &= (0 + 0 + z + 0) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned}$$

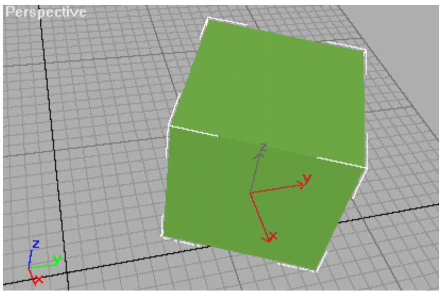
coord. omogenee

$$\begin{aligned} x^{R_z} &= x'/w' = (x.\cos\theta + y.\sin\theta)/1 \\ y^{R_z} &= y'/w' = (-x.\sin\theta + y.\cos\theta)/1 \\ z^{R_z} &= z'/w' = (z.1)/1 \end{aligned}$$

coord. cartesiane

Orientamento di un corpo rigido nello spazio



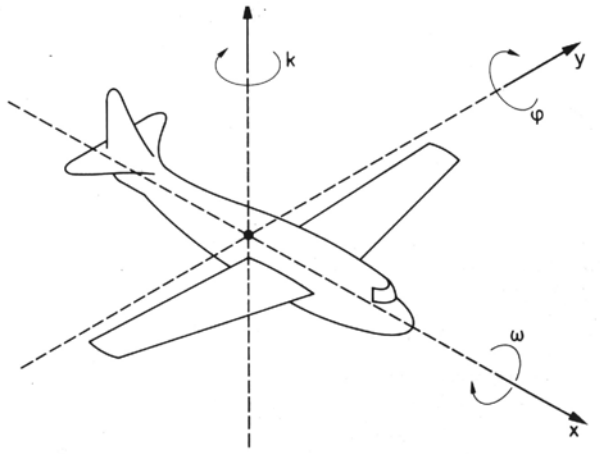


Tre parametri: tre rotazioni indipendenti.

Angoli di orientamento nello spazio 3D

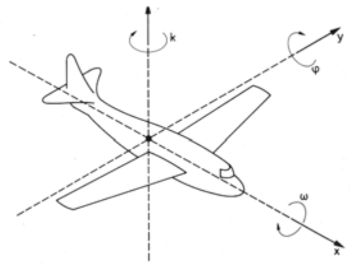
Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

Sono 3 rotazioni sequenziali, non commutative.



Rotazione attorno ad un singolo asse

Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

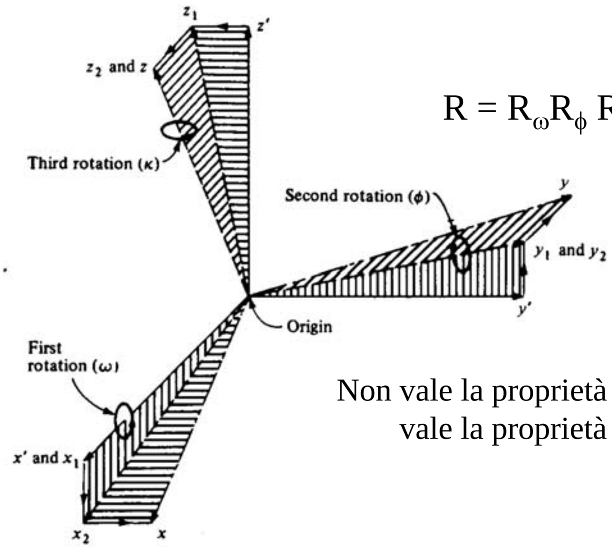


$$R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni sequenziali



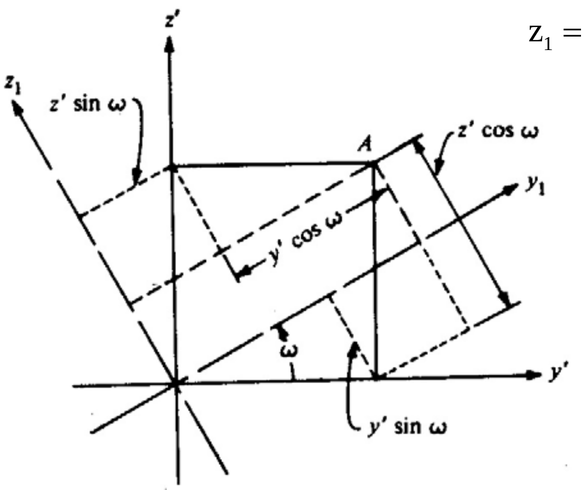
$R = R_\omega R_\phi\ R_\kappa$

Non vale la proprietà commutativa,
vale la proprietà associativa.

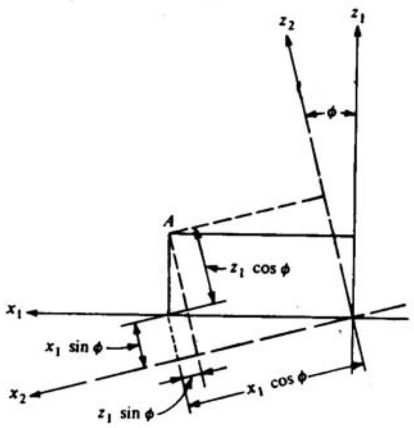
Ciascuna rotazione avviene su uno dei piani coordinati.

I) Rotazione attorno all'asse x (roll)

$$x_1 = x$$
$$y_1 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_1 = -y'\sin\omega + z'\cos\omega$$



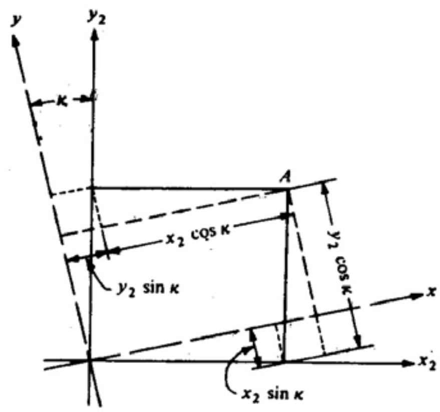
II) Rotazione attorno all'asse y (pitch)



$$x_2 = x_1 \cos\phi - z_1 \sin\phi$$
$$y_2 = y_1$$
$$z_2 = +x_1 \sin\phi + z_1 \cos\phi$$

$$x_2 = x'\cos\phi - (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi$$
$$y_2 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_2 = +x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

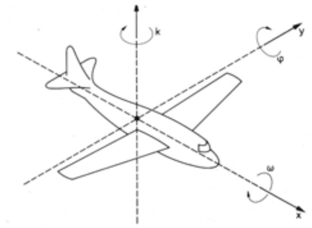
III) Rotazione attorno all'asse z (yaw)



$$x_3 = x_2 \cos k + y_2 \sin k$$
$$y_3 = -x_2 \sin k + y_2 \cos k$$
$$z_3 = z_2$$

$$x_3 = [x'\cos\phi - (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\cos k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\sin k$$
$$y_3 = -[x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\sin k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\cos k$$
$$z_3 = +x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

Dalle rotazioni alla matrice di rotazione



Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos k & \sin\omega\sin\phi\cos k + \cos\omega\sin k & -\cos\omega\sin\phi\cos k + \sin\omega\sin k \\ -\cos\phi\sin k & -\sin\omega\sin\phi\sin k + \cos\omega\cos k & \cos\omega\sin\phi\sin k + \sin\omega\cos k \\ \sin\phi & -\sin\omega\cos\phi & \cos\omega\cos\phi \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.
Rotazioni "*semplici*" utilizzate dai programmi di animazione, gestione matriciale *efficiente* del calcolo.

Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)

$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= (x.\cos\theta + y.\sin\theta + 0 + 0) \\ y' &= (-x.\sin\theta + y.\cos\theta + 0 + 0) \\ z' &= (0 + 0 + z + 0) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned}$$

coord. omogenee

$$\begin{aligned} x^{R_z} &= x'/w' = (x.\cos\theta + y.\sin\theta)/1 \\ y^{R_z} &= y'/w' = (-x.\sin\theta + y.\cos\theta)/1 \\ z^{R_z} &= z'/w' = (z.1)/1 \end{aligned}$$

coord. cartesiane

Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)

$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trasformare gli oggetti

- i vertici dell'oggetto vengono trasformati (le loro coordinate modificate)
- denotiamo i vertici (punti) come vettore colonna ***V.***
- ***R, D*** e ***S*** sono matrici associate a rotazione, traslazione e scala
- Il punto trasformato si ottiene come:

V'=V+D traslazione, ***D*** è un vettore di traslazione
V'=SV scala, ***S*** è una matrice di scala
V'=RV rotazione, ***R*** è una matrice di rotazione

La rototraslazione in forma matriciale

P’ = RP + T => P’ = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione

Composizione di trasformazioni

- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

  $$V''=A_2A_1V = A_2(A_1V) =(A_2A_1)V$$

  – la trasf. A_1 viene applicata per prima!

- ricordiamo che il prodotto di matrici <u>non è *commutativo*</u>: $A_2A_1 \neq A_1A_2$, mentre vale la proprietà associativa: $A_2(A_1V) =(A_2A_1)V$.

- ***L’applicazione di trasformazioni dipende dall’ordine con cui sono applicate.***
- ***Tutte le traslazioni, rotazioni e variazioni di scala, possono essere rappresentata in un’unica matrice.***

Trasformazioni inverse

- La trasformazione inversa si ottiene invertendo l'ordine delle trasformazioni ed invertendo le singole matrici:

$$A = A_3 A_2 A_1 \;\Leftrightarrow\; A^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1}$$

- Denotiamo le inverse come le matrici di trasformazione: T^{-1}, S^{-1}, R^{-1}.
- La traslazione inversa si ottiene *negando* i coefficienti di traslazione.
- La scala inversa si ottiene prendendo il *reciproco* dei coefficienti.
- La rotazione inversa si ottiene *negando* l'angolo di rotazione. Matrice trasposta. Si può verificare invertendo il segno e l'ordine delle rotazioni:

$$R = R_\omega R_\phi R_\kappa \;\Rightarrow\; R^T = R_{-\kappa} R_{-\phi} R_{-\omega}$$

La rototraslazione inversa in forma matriciale

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R^TRP = +R^TP' - R^TT \Rightarrow P = A^{-1}P'$

Proiezione di **T** sugli assi di arrivo: $\mathbf{r_i} \cdot \mathbf{T}$

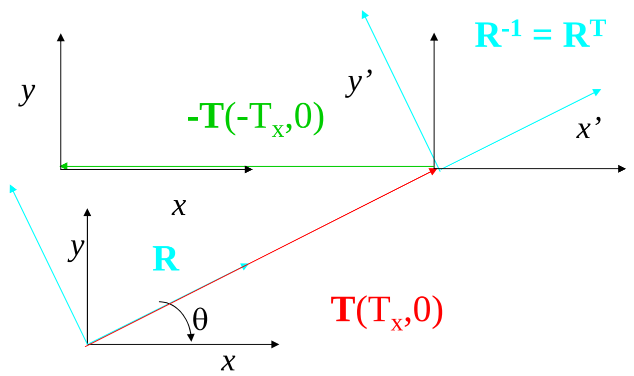
$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -(r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z) \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -(r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z) \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -(r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione (inversa)

Vettore di traslazione (inverso)

Perchè $-R^T T$?

Solo così applicando trasformata diretta ed inversa riportano un sistema di riferimento nella posizione iniziale.



$\mathbf{R^T T}$ è la proiezione del vettore traslazione sul sistema di riferimento ruotato.

Trasformazioni rigide

- rappresentate con matrici
- più trasformazioni possono essere combinate moltiplicando tra loro le matrici che rappresentano ciascuna trasformazione loro, creando una sola trasformazione matriciale.
- una trasformazione si ottiene in generale combinando trasformazioni di diverso tipo: rotazioni, scala, scala e traslazione.

Sommario

Gli avatar

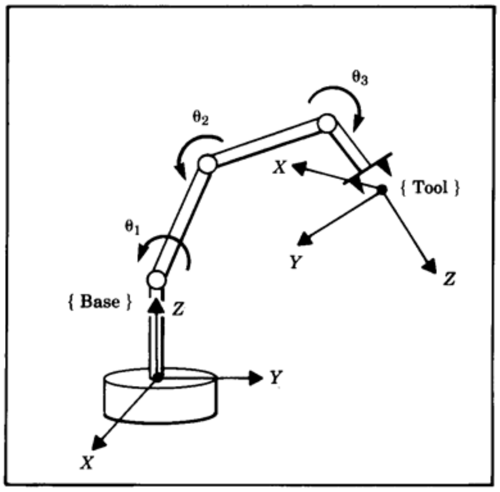
Gli scheletri

Posizione dei segmenti nello spazio (da SI)

La cinematica diretta

Cinematica diretta

Conosco il valore dei joint (angolo o offset) ➔ posizione ed orientamento dell'end-point.



La cinematica viene descritta come sequenza di posizioni.

Sommario

Gli avatar

Gli scheletri

Posizione dei segmenti nello spazio (da SI)

La cinematica diretta