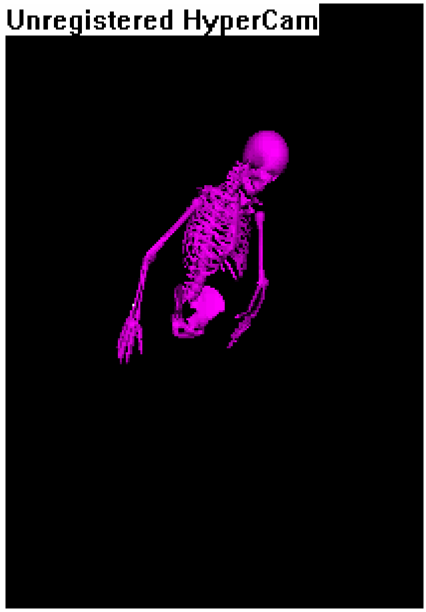
Cinematica degli scheletri

Alberto Borghese
Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Motion Analysis and Virtual Reality (MAVR)
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

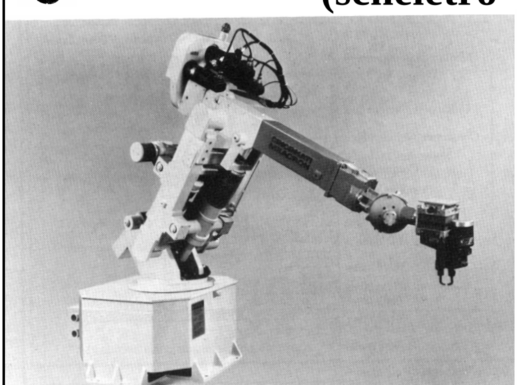
Riassunto

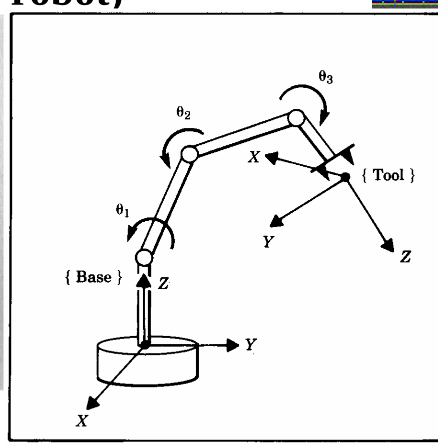
- Descrizion della posizione di uno scheletro.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.

Animazione mediante rotazioni



Descrizione della posizione (scheletro=robot)





Catena cinematica.

Posizione completamente definita dai gradi di libertà (movimenti concessi dai giunti articolari).

Frame. Sistema di riferimento connesso rigidamente con una parte del robot.

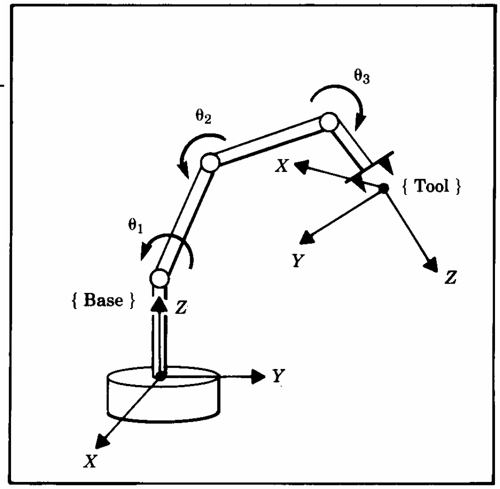
Joints and end-effector

Il braccio è strumentale nel posizionamento ed orientamento dell'end-effector!

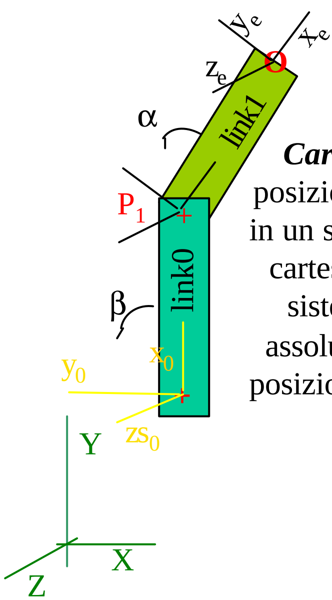
Tool frame viene associato all'end-effector.

Il base frame (o root) è il sistema di riferimento del robot.

Joint prismatici o rotatori.

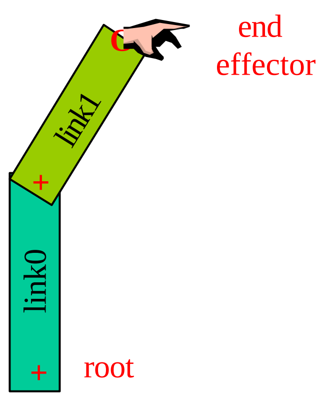


Spazi di movimento



Joint space. E' lo spazio dei parametri liberi. In questo esempio: α e β.

Cartesian space. E' la posizione di punti, cerniere in un sistema di riferimento cartesiano, ad esempio il sistema di riferimento assoluto. In particolare la posizione dell'end-effector.



Descrizione della posizione

- Trasformazione da un frame all'altro.
- La trasformazione è funzione dei parametri liberi e dei parametri geometrici.
- Trasformazioni tra sistemi di riferimento: rototraslazione espressa mediante matrici affini (trasformazioni matriciali).

La rototraslazione in forma matriciale

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione

Composizione di trasformazioni

- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

$$V" = A_2 A_1 V = A_2(A_1 V) = (A_2 A_1)V$$

  - la trasf. A_1 viene applicata per prima!

- ricordiamo che il prodotto di rotazioni <u>non è *commutativo*</u>: R_2R_1 **?** R_1R_2, mentre vale la proprietà associativa: $A_2(A_1V) = (A_2A_1)V$.

- ***Tutte le traslazioni, rotazioni e variazioni di scala, possono essere rappresentata in un'unica matrice.***

Trasformazioni inverse

- Denotiamo le inverse come le matrici affini: T^{-1}, S^{-1}, R^{-1}.

- La traslazione inversa si ottiene *negando* i coefficienti di traslazione.

- La rotazione inversa si ottiene *negando* l'angolo di rotazione. Matrice trasposta. Si può verificare invertendo il segno e l'ordine delle rotazioni:

$$R = R_\omega R_\phi R_\kappa \Rightarrow R^T = R_{-\kappa} R_{-\phi} R_{-\omega}$$

La trasformazione inversa in forma matriciale

P’ = **RP** + **T** => **P’** = **AP**

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R^T RP = +R^T P' - R^T T \Rightarrow P = A^{-1} P'$

Proiezione di **T** sugli assi di arrivo: $\mathbf{r_i} \bullet \mathbf{T}$

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -(r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z) \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -(r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z) \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -(r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione (inversa)

Vettore di traslazione (inverso)

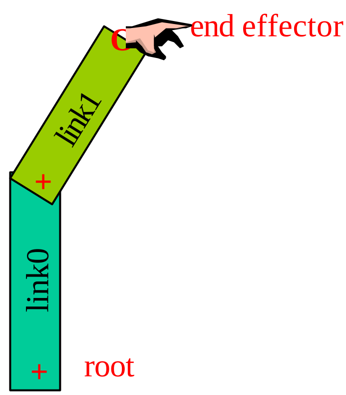
Convenzioni

$$\begin{bmatrix} {}^rX_P \\ {}^rY_P \\ {}^rZ_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^eX_P \\ {}^eY_P \\ {}^eZ_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^r\mathbf{P} = {}^r_e\mathbf{A}\, {}^e\mathbf{P}$$

Frame di riferimento del punto

Trasformazione del frame **e** nel frame **r**

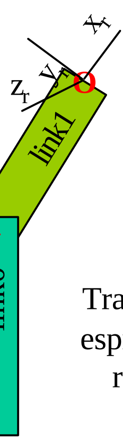


Riassunto

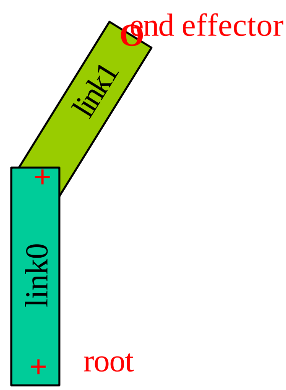
- Descrizione della posizione di uno scheletro.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.

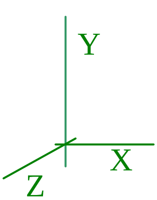
Posizione dei segmenti (I)

$^eP = [0\ 0\ 0\ 1]$
Punto espresso nel frame dell'end-effector.

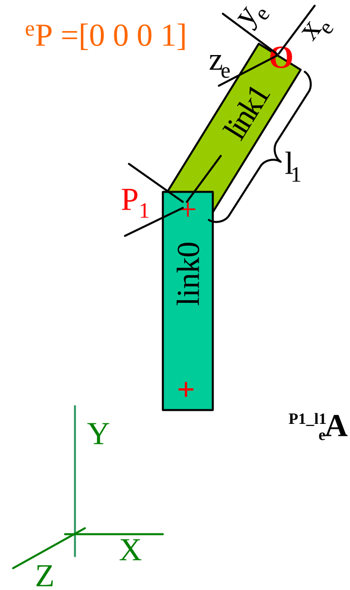


Trasformiamo ^eP fino ad esprimerlo nel sistema di riferimento assoluto XYZ: ^aP.



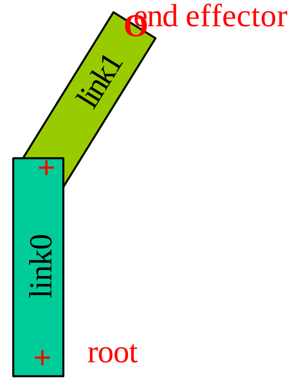


Posizione dei segmenti (II)

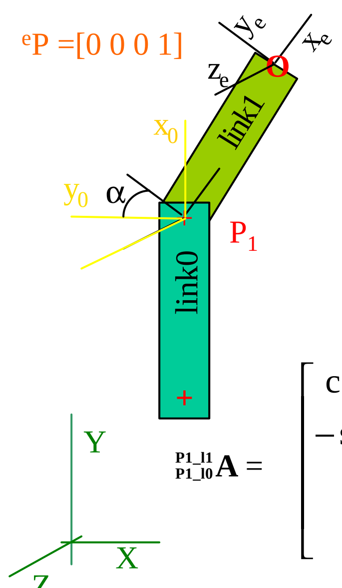


$$^{P1\_L1}\mathbf{P} = {}^{P1\_l1}_{\ e}\mathbf{A}\,{}^{e}\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]$$

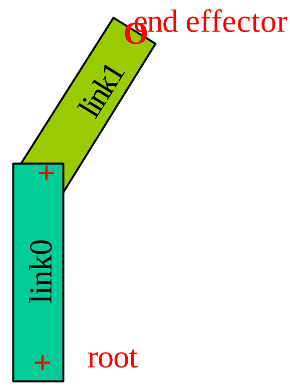
$$^{P1\_l1}_{\ e}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Posizione dei segmenti (III)



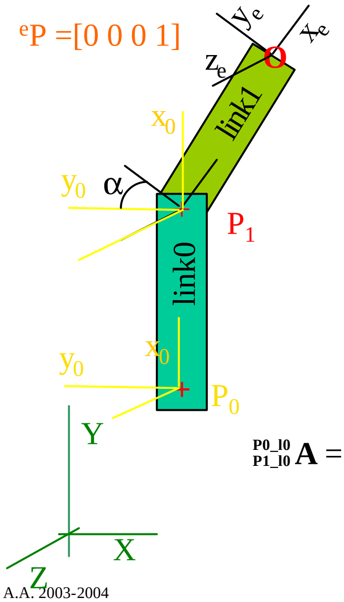
$$^{P1\_L0}\mathbf{P} = {}^{P1\_l1}_{P1\_l0}\mathbf{A}\,{}^{P1\_L1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos\alpha \\ -l_1 \sin\alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$^{P1\_l1}_{P1\_l0}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posizione dei segmenti (IV)

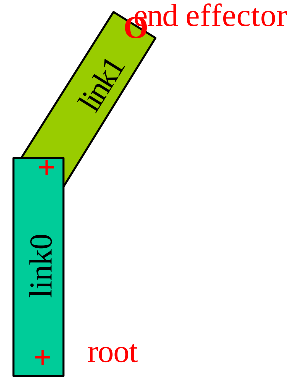
$^{e}P = [0\ 0\ 0\ 1]$



$$^{P0\_L0}\mathbf{P} = {}^{P0\_l0}_{P1\_l0}\mathbf{A}\ {}^{P1\_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos\alpha + l_0 \\ -l_1 \sin\alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

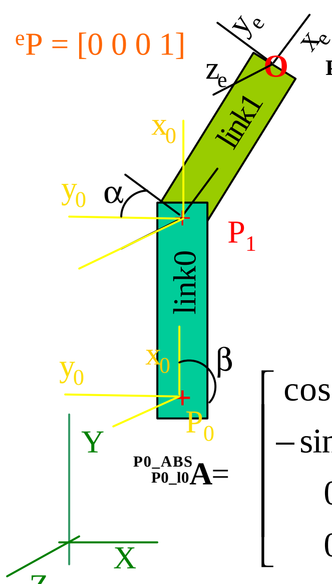
$$^{P1\_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos\alpha \\ -l_1 \sin\alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{P0\_l0}_{P1\_l0}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Posizione dei segmenti (V)

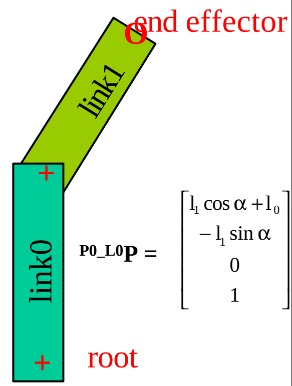
$^{e}P = [0\ 0\ 0\ 1]$



$$^{P0\_ABS}\mathbf{P} = {}^{P0\_ABS}_{P0\_l0}\mathbf{A}\ {}^{P0\_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos a + l_0)\cos b - l_1 \sin a \sin b \\ -(l_1 \cos a + l_0)\sin b - l_1 \sin a \cos b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

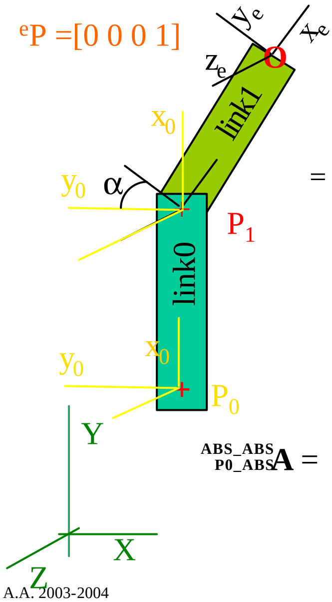
$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(a+b) + l_0 \cos b \\ -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{P0\_ABS}_{P0\_l0}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) & 0 & 0 \\ -\sin(b) & \cos(b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$^{P0\_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos\alpha + l_0 \\ -l_1 \sin\alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

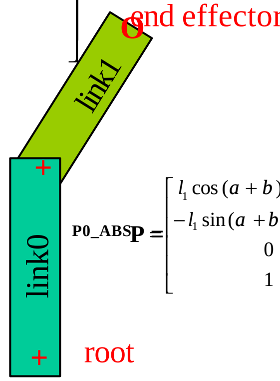
Posizione dei segmenti (VI)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}\mathbf{A}\ {}^{P0\_ABS}\mathbf{P} =$$

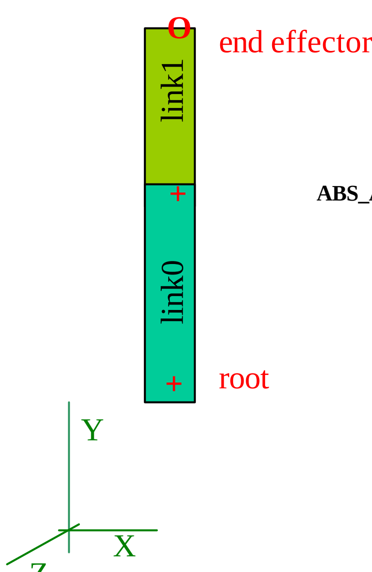
$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(a+b) + l_0 \cos b + T_x \\ -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$^{P0\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a+b) + l_0 \cos b \\ -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esempio di calcolo della posizione



$$\alpha = \beta = 0$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a+b) + l_0 \cos b + T_x \\ -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_0 + T_x \\ T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Riassunto

- Descrizione della posizione di uno scheletro.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.

Dall'end-effector alla base

• Il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della **geometria** (lunghezze dei segmenti) e dei **parametri liberi** (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).

• Le rotazioni vengono definite in un **sistema di riferimento locale**.

• Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre….

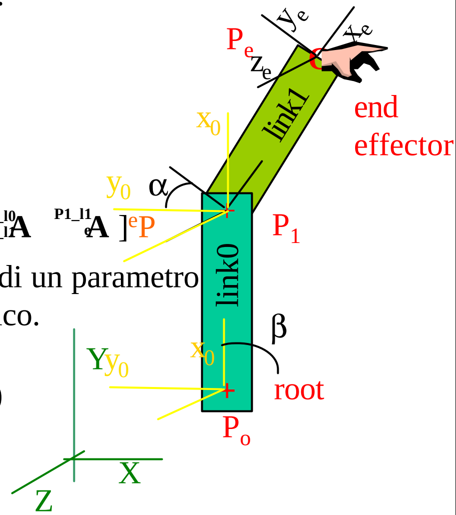
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = [\,^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}\mathbf{A}\;\, ^{P0\_ABS}_{P0\_l0}\mathbf{A}\;\, ^{P0\_l0}_{P1\_l0}\mathbf{A}\;\, ^{P1\_l0}_{P1\_l1}\mathbf{A}\;\, ^{P1\_l1}_{e}\mathbf{A}\,]\, ^{e}P$$

fattorizzare le matrici di trasformazione.

$$^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A} = \, ^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}\mathbf{A}\;\, ^{P0\_ABS}_{P0\_l0}\mathbf{A}\;\, ^{P0\_l0}_{P1\_l0}\mathbf{A}\;\, ^{P1\_l0}_{P1\_l1}\mathbf{A}\;\, ^{P1\_l1}_{e}\mathbf{A}$$

Osservazioni sulle matrici di trasformazione, A

Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base.



A è funzione di:
- Geometria
- Parametri liberi

$$^{ABS\_ABS}P = [\,^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}A \;\; ^{P0\_ABS}_{P0\_l0}A \;\; ^{P0\_l0}_{P1\_l0}A \;\; ^{P1\_l0}_{P1\_l1}A \;\; ^{P1\_l1}_{e}A\,]\; ^{e}P$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$$^{ABS\_ABS}P = [\,^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}A(T) \;\; ^{P0\_ABS}_{P0\_l0}A(b) \;\; ^{P0\_l0}_{P1\_l0}A(l_0) \;\; ^{P1\_l0}_{P1\_l1}A(a) \;\; ^{P1\_l1}_{e}A(l_1)\,]\; ^{e}P$$

Quante matrici di trasformazione?

- Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
- Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
- Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.

- Notazione molto generale (approccio costruttivo).
- Notazione prolissa.

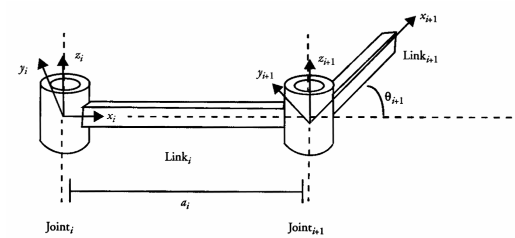
Descrizione di un link

Ipotesi:

•Cerniere 2D.

•L'asse z è orientato come l'asse di rotazione.

•L'asse x è orientato da P_i a P_{i+1}.



Denavit-Hartenberg notation

NB: 1 grado di libertà per joint.

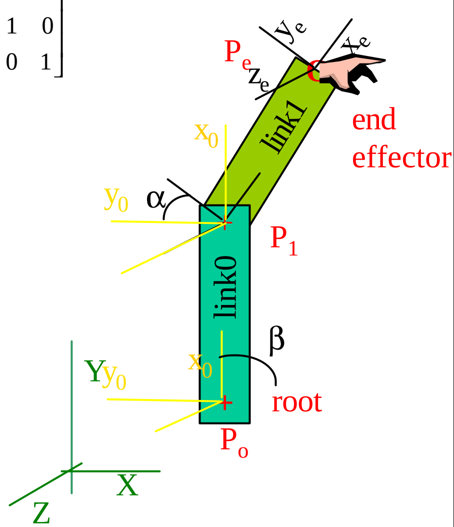
$$ {}^{i}_{i+1}A = \begin{bmatrix} \cos(J_{i+1}) & \sin(J_{i+1}) & 0 & l_i \\ -\sin(J_{i+1}) & \cos(J_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

DH notation applicata al nostro esempio

$$ {}^{i}_{i+1}A = \begin{bmatrix} \cos(J_{i+1}) & \sin(J_{i+1}) & 0 & l_i \\ -\sin(J_{i+1}) & \cos(J_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{P1\_l0}_{e}A = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 & l_1 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{P0\_ABS}_{P1\_l0}A = \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) & 0 & l_0 \\ -\sin(b) & \cos(b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



DH notation applicata al nostro esempio (II)

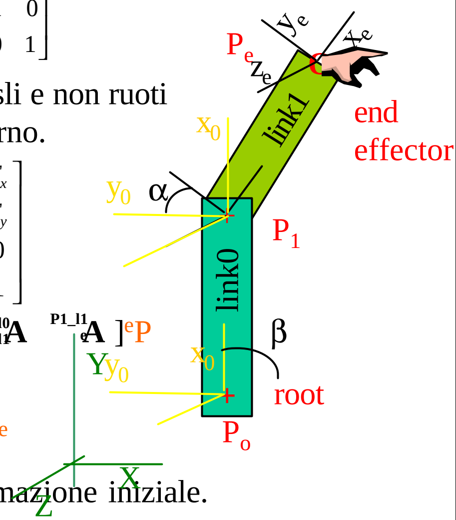
$$ {}^{\;\;i}_{i+1}A = \begin{bmatrix} \cos(J_{i+1}) & \sin(J_{i+1}) & 0 & l_i \\ -\sin(J_{i+1}) & \cos(J_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Si suppone che la base del braccio trasli e non ruoti rispetto all'ambiente esterno.

$$ A^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = [\,{}^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}\mathbf{A}\;\; {}^{P0\_ABS}_{P0\_l0}\mathbf{A}\;\; {}^{P0\_l0}_{P1\_l0}\mathbf{A}\;\; {}^{P1\_l0}_{P1\_l1}\mathbf{A}\;\; {}^{P1\_l1}_{e}\mathbf{A}\,]\,{}^{e}P $$

$$ {}^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \left({}_{P0\_ABS}^{\;\;ABS}A^{P0\_ABS}_{P1\_l0}A^{P1\_l0}_{e}A\right)P_e $$



Verificare che risulta la trasformazione iniziale.

Riassunto

- Descrizione della posizione di uno scheletro.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.

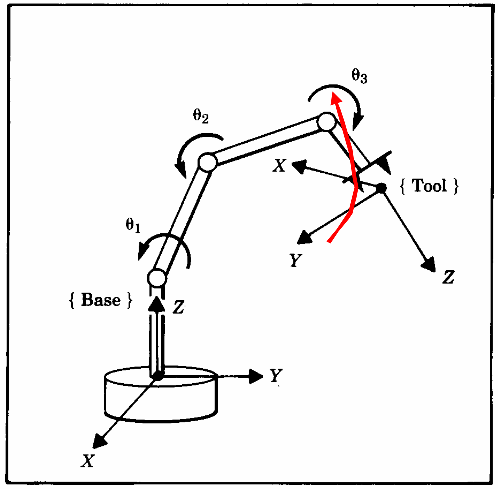
Generazione del movimento

Generazione della traiettoria dell'end-effector o dei joint.

Definizione di un punto di arrivo e di punti di passaggio (via-points).

Definizione di pochi punti ed interpolazione (spline).

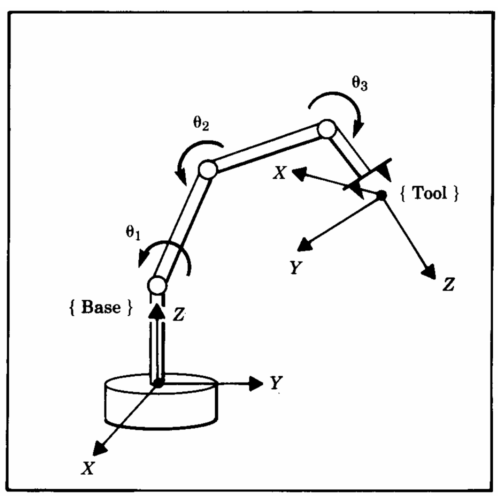
Movimento mediante variazione degli angoli articolari.



Cinematica diretta e inversa

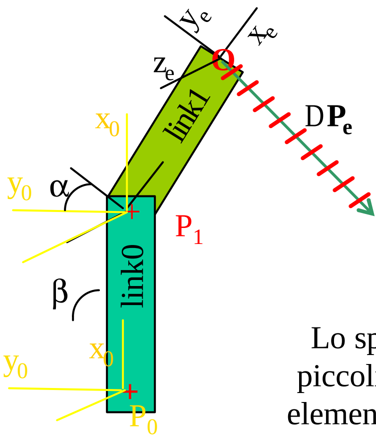
Conosco il valore dei joint (angolo o offset) ➔ posizione ed orientamento dell'end-point.

Conosco la posizione e l'orientamento dell'end-point ➔ devo determinare il valore dei joint.



La cinematica viene descritta come sequenza di posizioni.

Cinematica inversa



Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

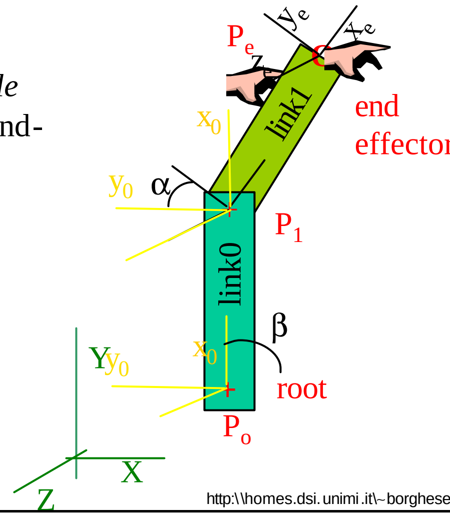
Riassunto

- Descrizione della posizione di uno scheletro.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.

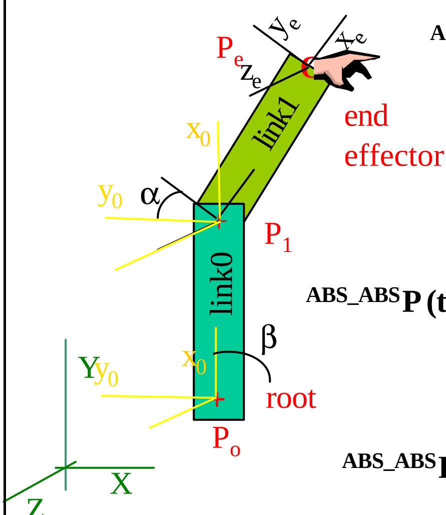
La cinematica diretta

Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento ci ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint, dall'end-effector alla base o viceversa.



Descrizione cinematica diretta



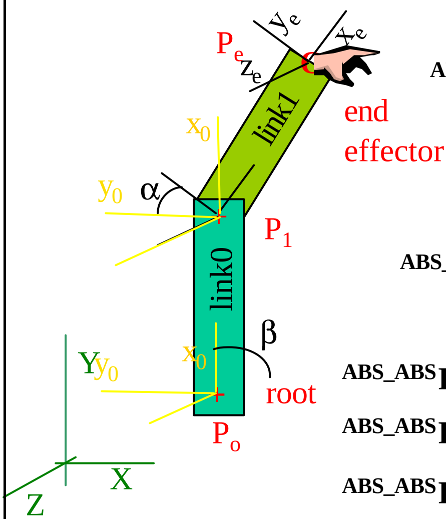
$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a+b) + l_0 \cos b + T_x \\ -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}\,(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a(t)+b(t)) + l_0 \cos b(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(a(t)+b(t)) - l_0 \sin b(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P}\,(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(a\,(\mathbf{t}), b\,(\mathbf{t}), \mathbf{T_x(t)}, \mathbf{T_y(t)} \mid \mathbf{l_0}, \mathbf{l_1})$$

Sequenza temporale di [a **(t)**, b **(t)**, $\mathbf{T_x(t)}$, $\mathbf{T_y(t)}$] ➔ sequenza temporale di $^{ABS\_ABS}\mathbf{P}\,(\mathbf{t})$.

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(a+b) + l_0 \cos b + T_x \\ -l_1 \sin(a+b) - l_0 \sin b + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P(t)} = {}^{ABS\_ABS}_{e}\mathbf{A(t)} \quad {}^{e}\mathbf{P}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_x\,(t) = f_x(}a\,\mathbf{(t),}\ b\,\mathbf{(t), T_x(t), T_y(t)\ |\ l_0, l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_y\,(t) = f_y(}a\,\mathbf{(t),}\ b\,\mathbf{(t), T_x(t), T_y(t)\ |\ l_0, l_1)}$$

$$^{ABS\_ABS}\mathbf{P_z\,(t) = f_z(}a\,\mathbf{(t),}\ b\,\mathbf{(t), T_x(t), T_y(t)\ |\ l_0, l_1)}$$

Come animare uno scheletro

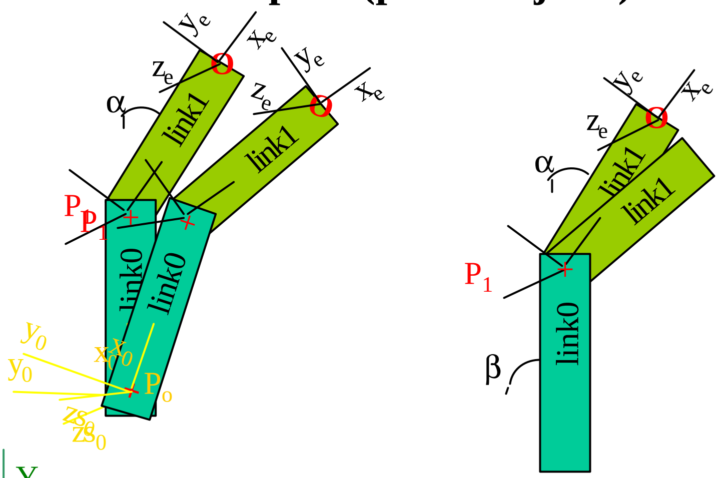
Data la sequenza di angoli (**<u>relativi</u>**) è possibile determinare istante per istante la posizione del braccio robotico.

Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?

Joint space (peso dei joint)



Rotazione attorno a P_o (angolo β)

Rotazione attorno a P_1 (angolo α)

La posizione dell'end effector è diversa a parità di rotazione.

Riassunto

- Descrizione della posizione di uno scheletro.
- Dall'end-effector alla base.
- Osservazioni sulle matrici di trasformazione.
- Introduzione alla cinematica.
- La cinematica diretta.