Animazione Digitale

Lezione 4
I Quaternioni

Prof. Alberto Borghese

Sommario

Rotazioni attraverso i quaternioni

Significato geometrico dei quaternioni

Dai quaternioni alla matrice di rotazione

Dai punti ai quaternioni

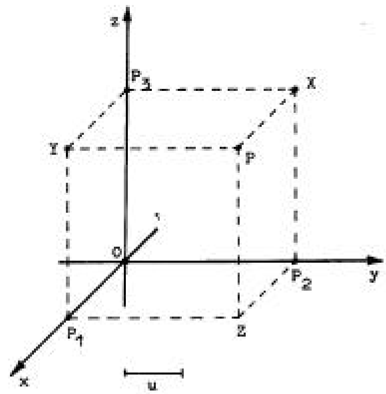
Interpolazione SLERP

Trasformazioni

Trasformo **P** in **P’**

Cambia la posizione del punto

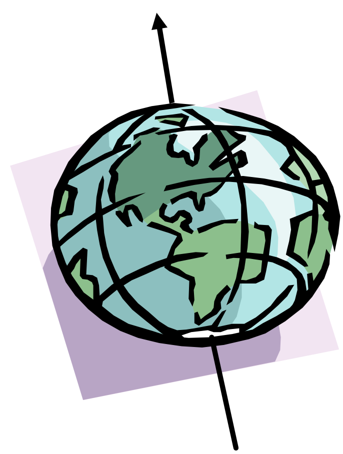
P’ = RP + T



La rotazione

Ammette rappresentazioni diverse.

- Angoli sequenziali (roll, pitch e yaw).
- Angoli di Eulero.
- Coseni direttori degli assi.
- Quaternioni.



Interpolazione delle matrici di rotazione

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotazione attorno a y di +90°

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotazione attorno a y di -90°

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolo (errato) dell'orientamento come media.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

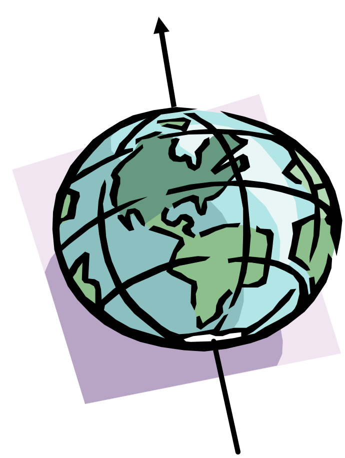
Calcolo corretto dell'orientamento come media (rotazione nulla)

Quaternioni

Rappresentazione della rotazione mediante:
1 vettore + 1 scalare

Asse di rotazione

Angolo di rotazione



I quaternioni ed i numeri complessi

I quaternioni possono essere considerati come una generalizzazione dei numeri complessi, con uno scalare *s* come parte reale e un vettore ***v*** come parte immaginaria.

Quaternioni della forma: $q=(s,(0,0,0))$ sono associati ai numeri reali.

Quaternioni della forma: $q=(s,(a,b,c))$ sono associati ai numeri complessi.

Denotiamo un quaternione q con:

$$q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = [s, \mathbf{v}]$$

dove ***i,j,k*** sono i quaternioni unitari ed equivalgono ai vettori unitari degli assi in un sistema vettoriale.

Valgono le seguenti proprietà:

$\mathbf{i}^2= \mathbf{j}^2= \mathbf{k}^2=-1$; **i, j, k** contribuiscono esclusivamente alla parte immaginaria.

$\mathbf{ij}=\mathbf{k}$; $\mathbf{ji}=-\mathbf{k}$

$\mathbf{Ijk} = -1$

Operazioni elementari sui quaternioni

Dalle proprietà: $\mathbf{i}^2= \mathbf{j}^2= \mathbf{k}^2= \mathbf{ijk} =-1$;
$\mathbf{ij}=\mathbf{k}$; $\mathbf{ji}=-\mathbf{k}$

ricaviamo le operazioni somma e moltiplicazione.

Somma:

$q+q'=(s+s',\mathbf{v}+\mathbf{v}')$

Moltiplicazione:

$qq'=(ss'-\mathbf{vv}', \mathbf{v}\times\mathbf{v}' +s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v})$

NB I quaternioni non sono commutativi rispetto al prodotto: qq' ? q'q.

Coniugato:

$q=(s,\mathbf{v})$ $q^*=(s,-\mathbf{v})$

Il prodotto di un quaternione con il suo coniugato dà il modulo del quaternione:

$qq^*=(ss-|\mathbf{v}^2|)=q^2$

Derivazione del prodotto

$q = s + \mathbf{v} = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ $\qquad$ $q' = s' + \mathbf{v'} = s' + x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$

$$qq' = (s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(s' + x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) =$$
$$[ss' + sx'\mathbf{i} + sy'\mathbf{j} + sz'\mathbf{k}] + [x\mathbf{i}s' + x\mathbf{i}x'\mathbf{i} + x\mathbf{i}y'\mathbf{j} + x\mathbf{i}z'\mathbf{k}] +$$
$$[y\mathbf{j}s' + y\mathbf{j}x'\mathbf{i} + y\mathbf{j}y'\mathbf{j} + y\mathbf{j}z'\mathbf{k}] + [z\mathbf{k}s' + z\mathbf{k}x'\mathbf{i} + z\mathbf{k}y'\mathbf{j} + z\mathbf{k}z'\mathbf{k}] =$$

$$ss' + \mathbf{ii'}xx' + \mathbf{jj'}yy' + \mathbf{kk'}zz' + s\mathbf{v'} + s'\mathbf{v} +$$
$$\mathbf{k}(xy' - yx') + \mathbf{j}(-xz' + zx') + \mathbf{i}(yz' - zy') =$$

$$=(ss' - \mathbf{vv'}, \mathbf{v} \times \mathbf{v'} + s\mathbf{v'} + s'\mathbf{v})$$

Dalle proprietà: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$;
$\mathbf{ij} = \mathbf{k}$; $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$

Altre operazioni sui quaternioni

- Negazione:
  dato $q=(s,\mathbf{v})$ si ha $-q=(-s,-\mathbf{v})$ ➔ $q - q = 0.$
- Quaternione coniugato:
  dato $q=(s,\mathbf{v})$ si ha $q^c=(s,-\mathbf{v})$ ➔ $qq^c=(ss-\mathbf{v}(-\mathbf{v}), \mathbf{v} \times -\mathbf{v} + s(-\mathbf{v}) + s\mathbf{v})$ ➔
  $qq^c=(s^2+||\mathbf{v}^2||, \mathbf{0}) = |q|^2$
- Identità moltiplicativa: ➔ $q * q^{-1} = 1 = (1, \mathbf{0}).$
  $q^{-1}=(s,-\mathbf{v})/||q^2||$ ➔ $q^{-1} = q^c$ *se* $|q| = 1.$

Quaternione unitario

Quaternioni e rotazioni

Se |*q*|=1 il quaternione è detto *unitario.*

- L'insieme dei quaternioni unitari forma una sfera in uno spazio a 4 dimensioni (s, v_x, v_y, v_z).
- Si può dimostrare che data una rotazione attorno all'asse identificato dal versore **n**, di un angolo $-\pi <= q <= p$, questa può essere rappresentata dal quaternione:

$$q=(\cos q/2, \mathbf{n} \sin q/2)$$

Rappresentazione della rotazione di un vettore

Dato un vettore **W** ed una rotazione **q:**

P = q W q'

Dove **W** = (0, **w**).

Le rotazioni di un vettore si possono concatenare mediante la proprietà associativa. Dati **q** e **p**:

q (p W p') q' = (qp) W (p'q').

Quaternioni e rotazioni sequenziali

∃ un unico quaternione, data la coppia: q(cos*q/2*, sin*q/2**n***)?

*q=(cos q/2, **n** sin q/2) =(cos -q/2, -**n** sin -q/2) =* q(-*q*, -***n***)

Le rotazioni non sono commutative: Il prodotto vettore non è commutativo.

*qq'=(ss'-**vv'**, **v** x **v'** +s**v'** + s'**v**)*

v // v'

Quando sono commutative? Quando la rotazione è attorno allo stesso asse. In questo caso si sommano gli angoli.

q(cos$q_1/2$, sin$q_1/2$***n***)q(cos$q_2/2$, sin$q_2/2$***n***) =

(cos$q_1/2$cos$q_2/2$ - sin$q_1/2$sin$q_2/2$, (cos$q_1/2$sin$q_1/2$) **n** sin$q_1/2$) =

Formule di addizione

= (cos($q_1/2$ + $q_2/2$), **n** sin($q_1/2$ + $q_2/2$))

Sommario

Rotazioni attraverso i quaternioni

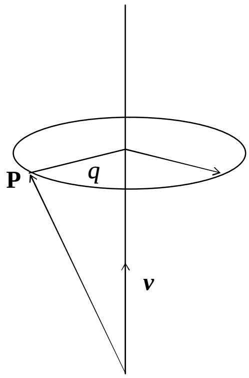
Significato geometrico dei quaternioni

Dai quaternioni alla matrice di rotazione

Dai punti ai quaternioni

Interpolazione SLERP

La rotazione con i quaternioni



- Definiamo l'operatore R_q=***q(.)q****^c* con ***q*** quaternione unitario ***q = (s,v)*** *con* ||***q***|| = ***1***
- Al vettore **P** sarà associato il quaternione ***p****(0,****P****)*.
- Applicato a ***p*** l'operatore R_q dà: ***qpq****^c* = ***qpq****^c*

In forma esplicita, sviluppando i prodotti si ottiene:

- ***qp*** =*(s,* ***v****) (0,* ***P****) = (0s –****vP****,* s**P** +0**v** + **v** L **P**)
- ***qpq'*** = (–**vP**, s**P** + **v** L **P**) (s, -**v**) =

= [–s(**vP**) +**v**(s**P** + **v** $\cancel{\text{L P)}}$, s(s**P** + **v** L **P**) +

(–**vP**)(-**v**) + (s**P** + **v** L **P**) L (-**v**)]=

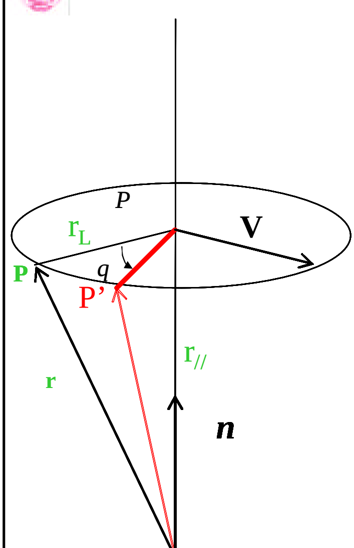
= (0, s²**P** +2s(**v** L **P**) + (**vP**)**v** - (**v** L **P**) L **v**]=

= 0,(s²-**v.v**)**P** + 2s(**v** L **P**)+2(**vP**)**v**

Se **q** = (cosα, sinα **n**)

$$\boxed{\begin{array}{c} qpq' = 0,(cos^2a - sin^2a)P + 2cosa(sina\ n\ L\ P)+2sina\ n(sina\ n\ P) = \\ = 0,\ Pcos2a + sin2a\ (n\ L\ P) + (1-cos2a)(nP)n \end{array}}$$

Interpretazione geometrica della rotazione



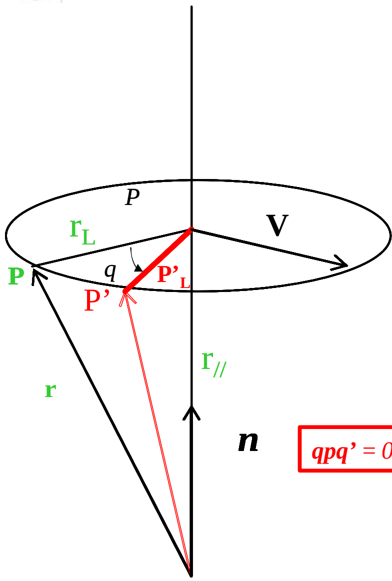
Il punto **P** è identificato dal vettore ***r***.
r può essere scomposto in una componente parallela a ***n*** e in una ortogonale:
r*//* **= (*****n.r*****)** ***n***
r$_L$= ***r*** **- (*****n.r*****)** ***n***

Osserviamo che la componente // resta invariata nella rotazione, varia solo la componente L.

Consideriamo ***V***, ortogonale a ***r***$_L$:
V=***n*** Λ ***r***$_L$

V ed r$_L$ costituiscono una base (ortogonale) per la descrizione di tutti i punti sul cerchio P, ed in particolare del punto ***P'****, ottenuto ruotando P di un angolo q attorno a* ***n****.*

Formulazione geometrica



Esprimiamo P' in funzione di r_L e **V**.

$$\mathbf{P'} = \mathbf{P'}_L + \mathbf{P'}_{//} = \mathbf{P'}_L + \mathbf{r}_{//}$$

$$\mathbf{P'}_L = \cos\theta\, \boldsymbol{r}_L + \sin\theta\, \mathbf{V} = \cos\theta\, \boldsymbol{r}_L + \sin\theta\, \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{r}_L =$$
$$= \cos\theta\, (\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n}) + \sin\theta\, (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{r}_L)$$

$$\mathbf{P'} = (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n} + \cos\theta\, (\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n}) + \sin\theta\, (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{r}_L) =$$
$$= (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n}\, (1-\cos\theta) + \boldsymbol{r}\cos\theta + \sin\theta\, (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{r}_L)$$

Questa espressione va confrontata con:

$$\boxed{qpq' = 0,\ \boldsymbol{P}cos2a + sin2a\ (\boldsymbol{n}\ L\ \boldsymbol{P}) + (1-cos2a)(\boldsymbol{nP})\boldsymbol{n}}$$

Ponendo $\alpha = \theta/2 \Rightarrow q(\cos\theta/2, \sin\theta/2\ \mathbf{n})$
Si ottiene la rotazione di un angolo θ.

Sommario

Rotazioni attraverso i quaternioni

Significato geometrico dei quaternioni

Dai quaternioni alla matrice di rotazione

Dai punti ai quaternioni

Interpolazione SLERP

Collegamento tra q e R

Applichiamo la rotazione ad un punto **w**, tramite il quaternione **q** = [s, **v**]

P = **Rw** $\qquad P = qwq' = 0,\ 2(\mathbf{vw})\mathbf{v} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{w} + \ 2s(\mathbf{v}\ L\ \mathbf{w})$ $\qquad$ **v** = [l, m, n]

Introducendo la matrice skew symmetric **v*** = $\begin{bmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{bmatrix}$

$P = vwv' = 0,\ 2(\mathbf{vw})\mathbf{v} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{w} + \ 2s(\mathbf{v}^*)\ \mathbf{w})$

Introducendo la matrice **A** = $[l\mathbf{v}, m\,\mathbf{v}, n\mathbf{v}]$ $\quad = \begin{bmatrix} l^2 & lm & l\,n \\ lm & m^2 & mn \\ l\,n & mn & n^2 \end{bmatrix}$

$P = vwv' = 0,\ 2\mathbf{A}\mathbf{w} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{w} + \ 2(\mathbf{v}^*)\mathbf{w})$

Da q a R

$P = vwv' = 0,\ 2\mathbf{A}\mathbf{w} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{w} + \ 2(\mathbf{v}^*)\mathbf{w} =$

$= 0,\ [2\mathbf{A} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2) + \ 2(\mathbf{v}^*)]\mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{w}$

$\mathbf{R} = 2\mathbf{A} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2) + 2(\mathbf{v}^*)$

E’ possibile ora derivare i coefficienti di **R** funzione dei coefficienti del quaternione,
q = [s, l, m, n]

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} s^2 + l^2 - m^2 - n^2 & 2(lm - sn) & 2(l\,n + sm) \\ 2(lm + sn) & s^2 - l^2 + m^2 - n^2 & 2(mn - sl) \\ 2(l\,n - sm) & 2(mn + sl) & s^2 - l^2 - m^2 + n^2 \end{bmatrix}$$

Da R a q

Dato **q** = [s, (l m n)],

- La trasformazione inversa dalla matrice al quaternione consiste nel prendere una generica matrice di rotazione:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & M_{0,3} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,0} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

in cui $M_{3,3}=1; M_{0,3}=M_{1,3}=M_{2,3}=M_{3,0}=M_{3,1}=M_{3,2}=0$

- Altri vincoli sulla matrice sono derivati dalla formula precedente:
  - Sommando gli elementi sulla diagonale si ottiene:

    $3s^2 - l^2 - m^2 - n^2 = 4s^2 - 1$ tenendo conte che il quaternione è unitario.
  - La traccia della matrice M è uguale a $4s^2$.
  - La traccia della matrice R è uguale a $4s^2 - 1$.

Determinazione dei parametri di q

Da questa equazione si ricava:

$$s = \cos q/2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{M_{0,0}+M_{1,1}+M_{2,2}+M_{3,3}} = \pm\frac{1}{2}(Traccia(R)-1)$$

e inoltre :

$$l = \frac{M_{2,1}-M_{1,2}}{4s}$$

$$m = \frac{M_{0,2}-M_{2,0}}{4s}$$

$$n = \frac{M_{1,0}-M_{0,1}}{4s}$$

Sommario

Rotazioni attraverso i quaternioni

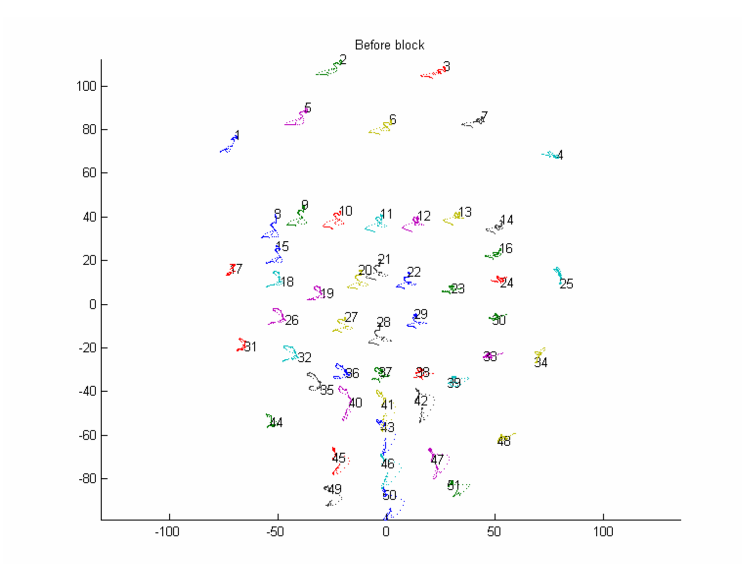
Significato geometrico dei quaternioni

Dai quaternioni alla matrice di rotazione

Dai punti ai quaternioni

Interpolazione SLERP

Stima della Rotazione dal movimento



Stima del quaternione a partire dal movimento

Supponiamo di avere una nuvola di punti {**a**} che si muove rigidamente, rototraslando da una posizione **A** ad una posizione **B** per formare la nuvola {**b**} .

OBBIETTIVO: Determinare **R** e del vettore di traslazione **T** che sono in grado di portare ciascuno dei punti di **A** *il più possibile* vicino al corrispondente in **B**.

Se il rumore sommato è nullo, la trasformazione è esatta.
Se ho rumore, utilizzo un numero elevato di punti e stimo il valore ottimo di **R** e **T**.

Definisco una funione costo: $$C(\mathbf{R},\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^{n} \left\| \mathbf{b}_i - \mathbf{R}\mathbf{a}_i - \mathbf{T} \right\|^2$$

Da minimizzare rispetto a **R** e **T**

Introduzione delle coordinate baricentriche

Siano $\overline{\mathbf{a}}$ e $\overline{\mathbf{b}}$ le coordinate dei baricentri delle due nuvole di punti (prima e dopo lo spostamento).

Riscrivo le coordinate dei miei punti come:

$$\mathbf{a_i}' = \mathbf{a_i} + \overline{\mathbf{a}} \qquad \mathbf{b_i}' = \mathbf{b_i} + \overline{\mathbf{b}}$$

La funzione costo da minimizzare prende la seguente forma:

$$C(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{n} \left\| \mathbf{b}'_i - \mathbf{R}\mathbf{a}'_i \right\|^2$$

Introduciamo la rappresentazione mediante quaternioni della rotazione:

$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4] = \mathbf{q}[s, \mathbf{v}]$ dove $\mathbf{v} = [q_2, q_3, q_4]$.

$$s = \cos(q/2)$$
$$\mathbf{v} = \sin(q/2) \cdot \mathbf{u}$$

$\|\mathbf{q}\| = 1$ **u** è l'asse di rotazione

Sviliuppo della minimizzazione

Rappresentando la matrice **R** attraverso il quaternione **q** e il suo coniugato $\mathbf{q}^c$, otteniamo la seguente funzione costo da minimizzare:

$$C' = \sum_{i=1}^{n} \left| \mathbf{b}'_i - \mathbf{q}\mathbf{a}'_i\, \mathbf{q}^{\mathbf{c}} \right|^2$$

Dato che **q** rappresenta una rotazione, $|\mathbf{q}|^2 = 1$
Possiamo quindi moltiplicare l'espressione di C' per $|\mathbf{q}|^2$ e ottenere:

$$C' = \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \mathbf{b}'_i - \mathbf{q}\mathbf{a}'_i\, \mathbf{q}^{\mathbf{c}} \right| \cdot |\mathbf{q}| \right)^2$$

Dato che il prodotto di due moduli gode della proprietà distributiva, possiamo scrivere:

$$C' = \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \mathbf{b}'_i \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{a}'_i\, \mathbf{q}^{\mathbf{c}}\mathbf{q} \right| \right)^2$$

Sviliuppo della minimizzazione (continua)

$$C' = \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \mathbf{b}'_i \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{a}'_i\, \mathbf{q}^{\mathbf{c}}\mathbf{q} \right| \right)^2$$

Considerando che: $\mathbf{q}^{\mathbf{c}}\mathbf{q} = |\mathbf{q}|^2 = 1$

$$C' = \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \mathbf{b}'_i \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}'_i \right| \right)^2$$

In assenza di errore sulle coordinate, C' = 0.
Sistema lineare omogeneo in 4 incognite, ed N punti. $(\mathbf{Aq})^2 = 0$.
Posso riscrivere questo sistema come:

q'A'Aq = 0. Con **A'*A** matrice 4 x 4.

E' un problema sovradeterminato: la rotazione è identificata da 3 parametri => det(**A'*A**)=0.

Soluzione è tramite svd il versore associato al valore singolare minore:
A'*A = **U W V** => **W** = diag(α_1, α_2, α_3, 0) => $\boxed{\mathbf{q} = \mathbf{V}^4.}$

Struttura della matrice A

Per ogni punto posso scrivere: $\mathbf{b'}_i \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{a'}_i$

$\mathbf{b'}_i \cdot \mathbf{q}$ = (0, b_x, b_y, b_z) (s, q_x, q_y, q_z) = (0, **b**) (s, **v**) =

(0 · s – $\mathbf{b_i} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{b_i} \Lambda \mathbf{v}$ + 0· **q** + s ·$\mathbf{b_i}$) =>

(– $\mathbf{b_i} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{b_i} \Lambda \mathbf{v}$ + s ·$\mathbf{b_i}$) =>

$$B_i' = \begin{bmatrix} b_x & -b_x & -b_y & -b_z \\ b_y & & & \\ b_z & & B_i & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Struttura della matrice A'*A

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i = -\mathbf{A}_i^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{c_i^T c_i} & -\mathbf{c_i^T C_i} \\ -\mathbf{C_i^T c_i} & \mathbf{c_i c_i^T} - \mathbf{C_i^2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i = -\mathbf{A}_i^2 = \begin{bmatrix} 1\times1 & 1\times3 \\ 3\times1 & 3\times3 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{c_i} = \mathbf{a'}_i - \mathbf{b'}_i$ $\mathbf{C}_i = \tilde{\mathbf{a}}'_i - \tilde{\mathbf{b}}'_i$ e la notazione $\tilde{\mathbf{x}}$ rappresenta la matrice 3 x 3 antisimmetrica che rappresenta il prodotto vettore con **x**, cioè: , $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ e quindi se, ad esempio, $\mathbf{q}' = [l, m, n]^T$

$$\tilde{\mathbf{q}}' = \begin{bmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{bmatrix}$$

Dai punti a q

1) Calcolo le coordinate delle 2 nuvole di punti in coordinate baricentriche.

2) Determino il valore della traslazione.

3) Costruisco la matrice **A**.

4) Calcolo il quaternione con versore associato al valore singolare più piccolo di **A**.

Sommario

Rotazioni attraverso i quaternioni

Significato geometrico dei quaternioni

Dai quaternioni alla matrice di rotazione

Dai punti ai quaternioni

Interpolazione SLERP

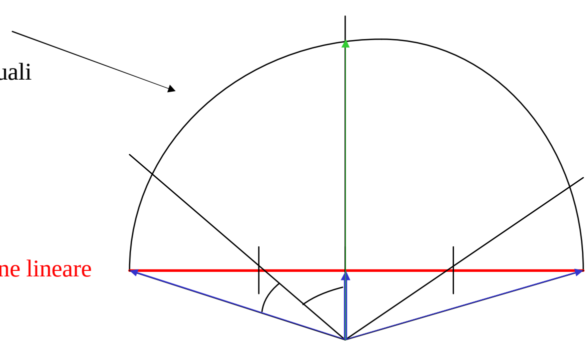
Interpolare

- Una sequenza di rotazioni puo' ora essere attuata da una sequenza di quaternioni
- La sequenza di matrici di rotazione espresse con angoli sequenziali (tilt, yaw, azimuth) viene trasformata in una sequenza di quaternioni che danno origine a una nuova sequenza di matricidi rotazione
- Come?
- Per interpolare tra due quaternioni unitari determinando i quaternioni intermedi che identificano le matrici di rotazione ricordiamo che lo spazio dei quaternioni unitari forma una ipersefra nello spazio 4D, perciò tutti i quaternioni interpolati giacciono sulla sfera stessa.
- Ricaviamo quella che viene chiamata **Spherical Linear Interpolation** (SLERP).

Problemi con l'interpolazione lineare di 2 vettori

- Una interpolazione lineare ingenua produce angoli diseguali e quindi una variazione di velocità. Consideriamo il caso bidimensionale:

Angoli disuguali



Interpolazione lineare

Quando sommo 2 vettori ottengo il vettore somma che interpola i 2 vettori. E' un'interpolazione lineare.

A noi invece interessa che il modulo del vettore rimanga costante e che il vettore medio produca angoli uguali con gli altri due vettori.

Interpolazione lineare tra 2 quaternioni

- Una interpolazione lineare ingenua produce angoli diseguali e quindi una variazione di velocità, da qui la nozione di interpolazione *sferica*:

I quaternioni sono vettori quadridimensionali. Non si possono visualizzare graficamente

Esempio di somma di rotazioni:
q_1 = [cos(30), **n**sin(30)]
q_2 = [cos(60), **n**sin(60)]

La loro media dà:
q_r = [(√3/2 + 1)/2, **n**(1+√3)/2] =
(normalizzando a 1) = [cos(45), **n**sin(45)]

Interpolazione lineare

Diversa da:

q_r = [cos(90), **n**sin(90)]
(occorrerebbe moltiplicarli!)

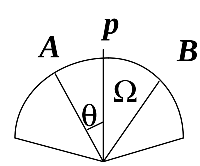
Interpolazione sferica in 2D

•Interpoliamo lungo una linea *geodesica* che ha gli estremi nei punti chiave (interpolazione sferica).

•In due dimensioni (per semplicità) i vettori ***A*,*B*** sono separati dall'angolo Ω, e ***p*** forma con ***A*** un angolo θ. Deriviamo ***p*** con interpolazione sferica con l'equazione parametrica: $\boldsymbol{p}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$;

$\boldsymbol{p}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ in coordinate intrinseche (sistema di riferimento intrinseco costituito dai vettori **A** e **B**):

$|\boldsymbol{p}|=1$;
$\boldsymbol{A.B}=cos(\Omega) \Rightarrow \boldsymbol{p.B} = cos(\Omega-q)$
$\boldsymbol{A.p}=cos(q)$



Da qui ricaviamo 2 equazioni nelle 2 incognite p_x e p_y:
$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}sin(\Omega -q)/sin(\Omega)+\boldsymbol{B}sin(q)/sin(\Omega)$

Interpolazione SLERP tra quaternioni

Generalizzando in 4d l'interpolazione tra due quaternioni unitari q_1 e q_2 che formano l'angolo: $q_1.q_2 = cos(\Omega)$ si ha, considerando q parametrizzato mediante il parametro u, 0<=u<=1:

$$slerp(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, u) = \mathbf{q_1} \frac{\sin(1-u)\Omega}{\sin(\Omega)} + \mathbf{q_2} \frac{\sin(\Omega u)}{\sin(\Omega)}$$

Soluzione non univoca

- Esistono due possibili archi geodesici che vanno da q_1 a q_2 uno segue il percorso più breve, l'altro il più lungo, e questo equivale a interpolare lungo l'angolo Ω o l'angolo $2\pi - \Omega$. Ciò consegue dal fatto che gli operatori $q(.)q^{-1}$ e $(-q)(.)(-q)^{-1}$ producono il medesimo risultato

- Per decidere quale percorso seguire occorre valutare la grandezza della distanza tra i due quaternioni e tra il primo e il secondo negato:

  $(p-q).(p-q)$ verso $(p+q).(p+q)$ e scegliere il minore, sostituendo, nel caso, q con $-q$.

Sommario

Rotazioni attraverso i quaternioni

Significato geometrico dei quaternioni

Dai quaternioni alla matrice di rotazione

Dai punti ai quaternioni

Interpolazione SLERP