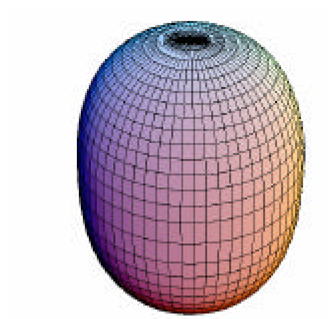
Animazione Digitale
lezione 3 - Geometria

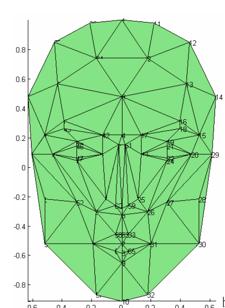
Prof. Alberto Borghese

Descrizione analitica di forme geometriche



Descrizione parametrica
- Quadriche,
- Spline,
- Rappresentazione sotto forma di funzioni.

Mesh, descrizione per punti.
Insieme di punti + connettività (e.g. VRML)



Geometria Analitica

Le coordinate dei parametri e dei punti sono espresse in un proprio **sistema di riferimento** (faremo riferimento alle mesh per semplicità).

- i vertici dell'oggetto sono definiti rispetto a un orientamento proprio e naturale
- un oggetto complesso può essere decomposto in elementi più semplici col proprio riferimento locale e in seguito assemblato aggragando oggetti elementari.

Per collocare correttamente nello spazio un oggetto si applicano le trasformazioni che cambiano il riferimento locale.

Descrizione analitica di forme geometriche semplici e della loro trasformazione geometrica (anche proiettiva).

Sommario

Richiami di algebra delle matrici

Spazi vettoriali

Geometria analitica del punto, della retta e del piano

Geometria del movimento

Le rotazioni

Matrici

$$A = [a_{i,j}] \qquad A^T = [a_{j,i}]$$

$$a\,A = [a\,a_{i,j}] \qquad C = A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

$$C = AB = [c_{i,j}] \text{ dove } [c_{i,j}] = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Prodotto degli elementi di una riga per gli elementi di una colonna.

Se A (n x m) ➔ B (m x p) ➔ C (n x p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ==> \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}$$

Matrici (Proprietà)

La somma è associativa e commutativa (A + B) + C = A + (B + C).

Il prodotto è associativo rispetto alla somma ma non commutativo (A+B)C = AC + BC.

AB 1 **BA**

$$I = [a_{i,j}] = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{matrice identità}$$

$$AI = A = IA$$

$$\text{vettore come matrice colonna} : \overline{u}^T = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$\text{prodotto vettore matrice} : \overline{v} = \overline{u}^T M$$

Determinante

A = [$a_{i,j}$]

$$\det(A) = \sum_j (-1)^{(i+j)} a_{ij} A^*_{ij} = \sum_i (-1)^{(i+j)} a_{ij} A^*_{ij}$$

A* minore complementare di A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Elementi sulla riga

det(A) = $(-1)^{(2+1)}$ (2) [(3 * 2) – (-2 * 1)] + $(-1)^{(2+2)}$ (0) [(1*2) – (-2*1)] +
$(-1)^{(2+3)}$ (1) [(1*1)-(3*1)] = -16 + 2 = -14

Matrice Inversa

A = [$a_{i,j}$]

$$A^{-1} = 1/\det(A) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0\cdot 2 - 1\cdot 1 & -[3\cdot 2 - (-2)\cdot 1] & 3\cdot 1 - (-2)\cdot 0 \\ -[2\cdot 2 - 1\cdot 1] & 1\cdot 2 - (-2)\cdot 1 & -[1\cdot 1 - (-2)\cdot 2] \\ 2\cdot 1 - 0\cdot 1 & -[1\cdot 1 - 3\cdot 1] & 1\cdot 0 - 3\cdot 2 \end{bmatrix} = (-1/14)\begin{bmatrix} -1 & -8 & 3 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

detA = -14

$$AA^{-1} = -1/14 \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) + 3(-3) - 2\cdot 2 & 1(-8) + 3\cdot 4 - 2(2) & 1\cdot 3 + 3(-5) - 2(-6) \\ 2(-1) + 0(-3) + 1(2) & 2(-8) + 0\cdot 4 + 1\cdot 2 & 2\cdot 3 + 0(-5) + 1(-6) \\ 1(-1) + 1(-3) + 2\cdot 2 & 1(-8) + 1\cdot 4 + 2\cdot 2] & 1\cdot 3 + 1(-5) + 2(-6) \end{bmatrix} = I$$

Matrici ortonormali

$\mathbf{A} = [a_{i,j}]$

Condizione di ortogonalità:

- La somma dei prodotti di due righe o di due colonne è = 0.

Condizione di normalità:

- Il determinante è = 1.

Condizione di normalità:

- Il determinante è = 1.
- La somma dei prodotti di due righe o di due colonne è = 0.

$\Rightarrow$ La somma dei quadrati degli elementi di una riga o colonna è = 1.

$\Rightarrow$ $A' = A^{-1}$

Sistema lineare

$a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{1N}\, x_N = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{2N}\, x_N = b_2$

....

$a_{M1}x_1 + a_{M2}\, x_2 + \ldots\ldots\ \ a_{MN}\, x_N = b_M$

Esempio:

$3x_1 + 2\, x_2 + \ldots\ldots\ \ 4x_N = 5$

$4x_1 - 2\, x_2 + \ldots\ldots\ \ 0.5\, x_N = 3$

....

$2x_1 + 3\, x_2 + \ldots\ldots\ \ -3\, x_N = -1$

A X = B

M x N

(Matrice di disegno)

N x 1

Vettore delle incognite

M x 1

Vettore dei termini noti

Sistema lineare: soluzione

$\mathbf{A\,X = B} \Longrightarrow \mathbf{A'\,A\,X = A'\,B} \Longrightarrow \mathbf{(A'\,A\,)^{-1}A'\,A\,X = (A'\,A\,)^{-1}A'\,B}$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{X = (A'A)^{-1}A'B}$$

N> M Numero equazioni minori del numero di incognite - det(**A'A**) = 0

N = M Numero equazioni uguale al numero di incognite - det(**A'A**) = 0 => ∞ soluzioni
det(**A'A**) ? 0 => 1 soluzione

N < M Numero equazioni maggiore del numero incognite - det(**A'A**) = 0 => ∞ soluzioni
det(**A'A**) ? 0 => 1 soluzione

NB La soluzione minimizza l'errore tra le osservazioni ed il modello:
min $(\mathbf{AX - B})^2$

Sistema lineare: soluzione robusta

$\mathbf{A\,X = B} \Longrightarrow \mathbf{A'\,A\,X = A'\,B} \Longrightarrow \mathbf{X = (A'A)^{-1}A'B}$

Numero di condizionamento varia circa con (A'*A).

Soluzione tramite Singular Value Decomposition

$\mathbf{A\,X = B}$

$\mathbf{U\,W\,V\,X = B}$

Ortonormali Diagonale

$\mathbf{V^T\,W^{-1}\,U^T\,U\,W\,V\,X = V^T\,W^{-1}\,U^T\,B} \rightarrow \mathbf{X = V^T\,W^{-1}\,U^T\,B}$

Numero di condizionamento varia circa con A. W^{-1} è diagonale. $w_{ii}^{-1} = 1/w_{ii}$

Sommario

Richiami di algebra delle matrici

Spazi vettoriali

Geometria analitica del punto, della retta e del piano

Geometria del movimento

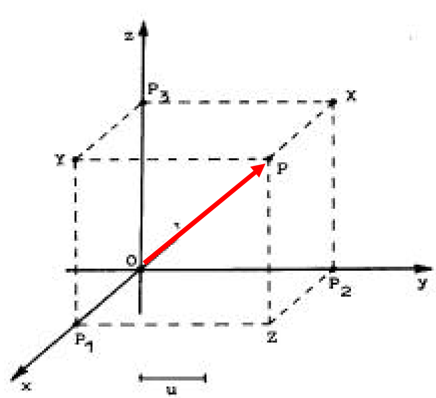
Le rotazioni

Vettori

Sono identificati da 2 punti: P e Q. Sono caratterizzati da modulo (distanza tra P e Q), orientamento e verso.

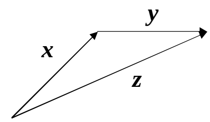
Vettore **(P – O)** in rosso.

Con i vettori posso identificare la posizione di tutti i punti nello spazio Euclideo (R^k).



Spazi vettoriali (definizione)

I) *Uno spazio vettoriale W è un gruppo additivo rispetto all'addizione sse:*

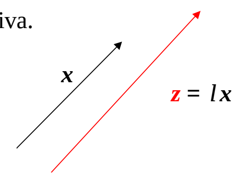


E' definita l'addizione: $\boldsymbol{w} = \mathbf{x} + \boldsymbol{y}$.
Proprietà: commutativa, associativa.
Esistenza: dello zero e dell'opposto.

II) E' definita l'operazione di moltiplicazione numerica per uno scalare:

$\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\lambda$

Proprietà: distributiva rispetto alla somma ed associativa.
Esistenza: dell'elemento neutro.

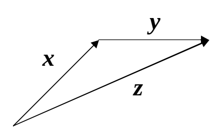


Somma e sottrazione tra vettori

Il vettore **somma** ($\mathbf{x} + \mathbf{y}$) viene ottenuto come segue:

A) I due vettori **x** e **y** vengono posizionati in sequenza: la posizione finale di **x** coincide con la posizione iniziale di **y**.

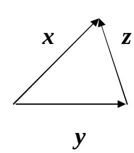
B) Il vettore somma parte dalla posizione iniziale del primo vettore (**x**) e ha posizione finale la posizione finale del secondo vettore (**y**).



Il vettore **differenza** ($\mathbf{x} - \mathbf{y}$) viene ottenuto come segue:

A) I due vettori **x** e **y** vengono posizionati con l'origine comune.

B) Il vettore differenza congiunge le posizioni finali dei 2 vettori.



Base di uno spazio vettoriale

Linearità: $a(\overline{u}+\overline{v}) = a\overline{u} + a\overline{v}$

Combinazione lineare: $\overline{w} = a_1\overline{u_1} + a_2\overline{u_2} + ... + a_n\overline{u_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{\boldsymbol{u_i}}$

$a_1\overline{u_1} + a_2\overline{u_2} + ... + a_n\overline{u_n} = 0$ iff $a_1 = a_2 .. = a_n = 0$

⇩

$(\overline{u_1},...,\overline{u_n})$ sono linearmente indipendenti.

$(\overline{u_1},...,\overline{u_n})$ è una **base** dello spazio vettoriale.

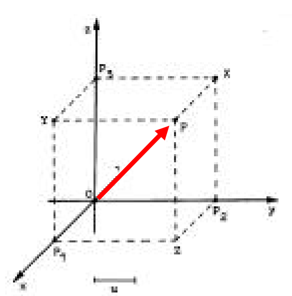
Base per uno spazio Euclideo

Con i vettori posso identificare la posizione di tutti i punti nello spazio Euclideo (R^k).

(P – O) = **(P – z)** + **(z – P$_2$)** + **(P$_2$ – O)**

(P - z) = | P – z | **k**
(z - P$_2$) = | z - P$_2$ | **i**
(P$_2$- O) = | P$_2$- O| **j**

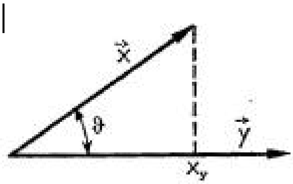
$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{\boldsymbol{u_i}}$$

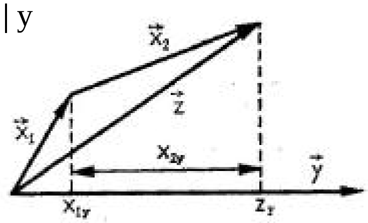


I versori: ***i, j, k*** sono i vettori di lunghezzza unitaria che individuano gli assi cartesiani, sono ortogonali, e formano una terna di vettori *ortonormali*, una ***base*** ortogonale (ortonormale) dello spazio cartesiano.

Prodotto interno (o scalare)

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos(\theta) = |x_y|\,|y|$





Proprietà commutativa: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

Annullamento del prodotto: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ sse $\mathbf{x} = 0$

Funzione lineare del primo fattore e vale la proprietà associativa:

$(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

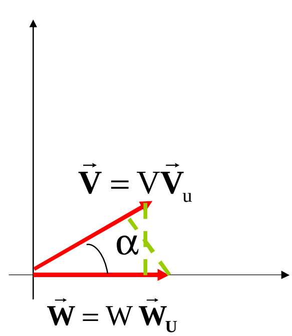
$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}$

Prodotto scalare, significato geometrico

Da: $\lambda\mathbf{x} = ||\lambda\mathbf{x}||\,\mathbf{x_u}$ con $\mathbf{x_u}$ versore di $\mathbf{x}$, segue che:

Proiezione ortogonale di un segmento su un altro.

Calcolo il prodotto scalare in questo modo:



$$P = \mathbf{W} \bullet \mathbf{V} = WV(\mathbf{W_u} \bullet \mathbf{V_u})$$

$$P = WV(W_{u_x}V_{u_x} + W_{u_y}V_{u_y} + W_{u_z}V_{u_z}) = WV\cos(a)$$

Orientamento di (**P-O**): $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{V} \bullet \mathbf{W}}{|\mathbf{V}||\mathbf{W}|}$

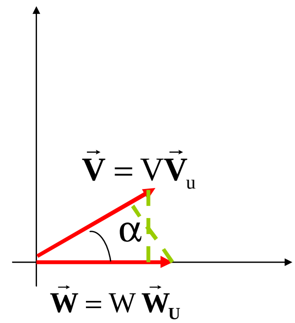
Il coseno dell'angolo tra 2 segmenti è il prodotto scalare normalizzato.

Proprietà del segno del prodotto scalare

- se $\boldsymbol{V.W} > 0$ l'angolo α è: $-90° < \alpha < 90°$
- se $\boldsymbol{V.W} = 0$ l'angolo α è: $-90°$ o $90°$
- se $\boldsymbol{V.W} < 0$ l'angolo α è: $90° < \alpha < 270°$

il prodotto scalare si può quindi usare per valutare l'orientamento di 2 segmenti.

Il prodotto scalare è nullo se i segmenti sono ortogonali (condizione di perpendicolarità)



NB $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

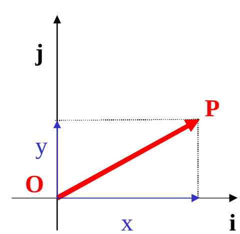
Condizione di ortogonalità: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

Base ortogonale

$(\overline{u_1},\ldots,\overline{u_n})$ è la base dello spazio

Vale la relazione: $\boxed{\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_j = 0 \qquad i \neq j}$ $\quad i_x j_x + i_y j_y = 0$

Le basi sono ortogonali (e.g. gli assi coordinati degli spazi Euclidei)



Le coordinate (x,y,..) di un punto nello spazio Euclideo non sono altro che la proiezione ortogonale del vettore **(P-O)** sugli assi.

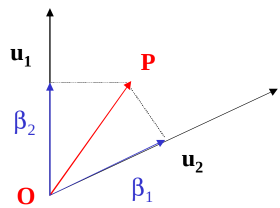
B) **(P – O)** = x **i** + y **j** $\quad \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{\boldsymbol{u}_i}$

A) x = **(P-O) • i**
y = **(P-O) • j**

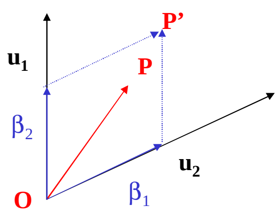
A) Le coordinate di un punto si ottengono proiettando (P-O) sugli assi.

B) Il vettore (P-O), cioè il punto, si ottiene come combinazione lineare delle coordinate moltiplicate per i versori degli assi.

Base non ortogonale dello spazio Euclideo



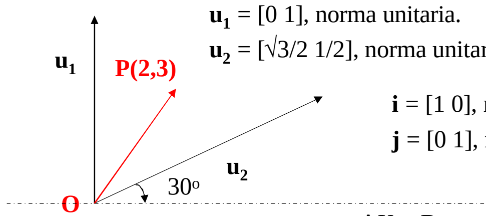
$\beta_1 = (\mathbf{P-O}) \bullet \mathbf{u_1}$
$\beta_2 = (\mathbf{P-O}) \bullet \mathbf{u_2}$



$\mathbf{P'} = \beta_1 \mathbf{u_1} + \beta_2 \mathbf{u_2}$
$\mathbf{P} = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2}$

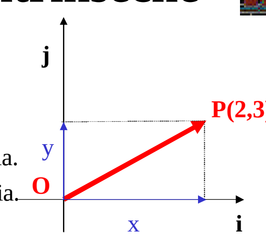
$\boxed{a_i \ \mathbf{?} \ b_i}$

Calcolo delle coordinate intrinseche



$\mathbf{u_1}$ = [0 1], norma unitaria.
$\mathbf{u_2}$ = [√3/2 1/2], norma unitaria.

$\mathbf{i}$ = [1 0], norma unitaria.
$\mathbf{j}$ = [0 1], norma unitaria.



AX = B

$2 = \alpha_1\, 0 + \alpha_2 \sqrt{3}/2$
$3 = \alpha_1\, 1 + \alpha_2 1/2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$2 = \alpha_1\, 1 + \alpha_2 0$
$3 = \alpha_1\, 0 + \alpha_2 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

det(A) = (-√3/2)(1) ? 1

$\boxed{\text{Quando det(A) = 0?}}$

det(A) = (1)(1) = 1

$\alpha_1 = 1.8453$
$\alpha_2 = 2.3094$

$P = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} =$ 1.8453*0+2.3094*0.866
1.8454*1+2.3094*1/2

$\alpha_1 = 2$
$\alpha_2 = 3$

$P = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j}$

Coordinate intrinseche ? proiezione ortogonale di P su $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$

Prodotto vettore (cross product)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} x \vec{\mathbf{V}} = \quad \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U_y V_z - U_z V_y) \\ (U_z V_x - U_x V_z) \\ (U_x V_y - U_y V_z) \end{bmatrix}$$

Il risultato è un vettore a sua volta.

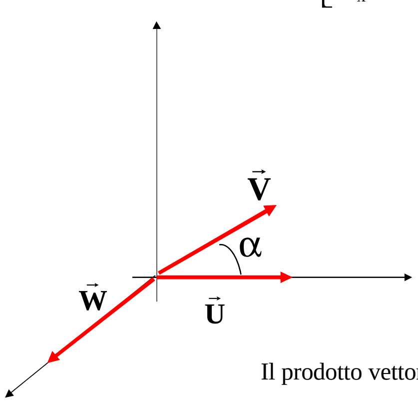
$$\mathbf{U} = \mathbf{i}$$
$$\mathbf{V} = \mathbf{j}$$

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} x \vec{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} (00 - 00) \\ (00 - 00) \\ (11 - 00) \end{bmatrix} = [0\ 0\ 1] = \ \vec{\mathbf{k}}(0,0,1)$$

Il prodotto vettoriale **non** gode della proprietà commutativa.

Prodotto vettore (significato geometrico)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} x \vec{\mathbf{V}} = \quad \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U_y V_z - U_z V_y) \\ (U_z V_x - U_x V_z) \\ (U_x V_y - U_y V_z) \end{bmatrix}$$



Vettore normale al piano identificato da **U** e **V**

$$|\,\mathbf{W}\,| = |\,\mathbf{U}\,|\,|\,\mathbf{V}\,| \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = |(\vec{\mathbf{U}} x \vec{\mathbf{V}})| / (|\,\mathbf{U}\,|\,|\,\mathbf{V}\,|)$$

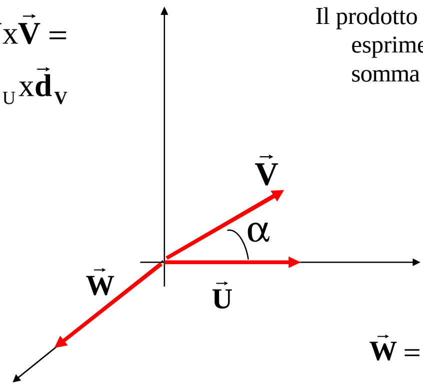
Il prodotto vettore è nullo se i segmenti sono paralleli

Il verso di **W** è coerente con la "regola della mano destra"

Prodotto vettore (significato geometrico)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} =$$
$$(\mathrm{UV})\vec{\mathbf{d}}_{\mathrm{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{d}}_{\mathbf{V}}$$

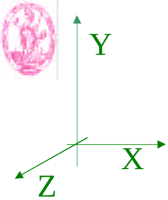
Il prodotto vettore (*cross product*) si può esprimere con i versori (ricordiamo che la somma di due vettori è un vettore).



$$\mathbf{i} = (1,0,0)$$
$$\mathbf{j} = (0,1,0)$$
$$\mathbf{k} = (0,0,1)$$
$$U = U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + U_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{W} = (U_yV_z - U_zV_y)\mathbf{i} - (U_xV_z - U_zV_x)\mathbf{j} + (U_xV_y - U_yV_x)\mathbf{k}$$

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} x \vec{\mathbf{V}} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}$$

Lo spazio Euclideo



- Lo spazio può essere orientato in due modi:
  - mano destra: avvolgete la mano all'asse z e puntate il pollice verso di voi, x viene a destra e y va verso l'alto (terna destrorsa).
  - mano sinistra: avvolgete la mano all'asse z e puntate il pollice verso di voi, x viene a sinistra e y va verso l'alto.
- Questo definisce il *world coordinate system* in cui sono definiti gli oggetti.

Sommario

Richiami di algebra delle matrici

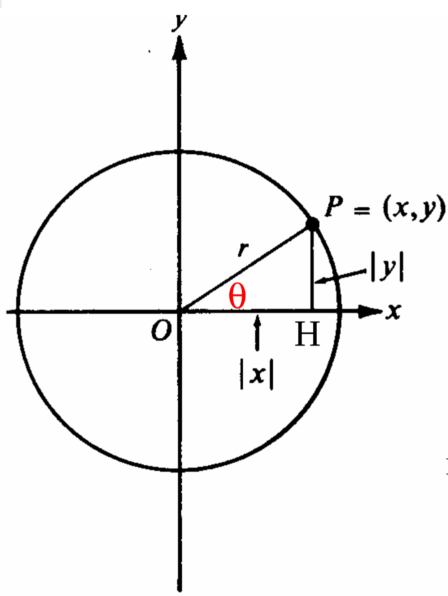
Spazi vettoriali

Geometria analitica del punto, della retta e del piano

Geometria del movimento

Le rotazioni

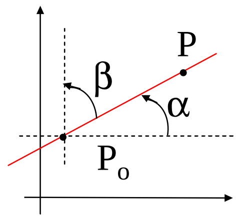
Le coordinate polari



$x = r \cos(\theta) = OH$
$y = r \sin(\theta) = PH$

$P(r,\theta)$ sono le coordinate polari.

Rette orientate nel piano



r = |P-P$_o$|

P(X,Y) = $\begin{cases} X_o + r\cos(a) \\ Y_o + r\cos(b) = Y_o + r\cos(90 - a) = Y_o + r\sin(a) \end{cases}$

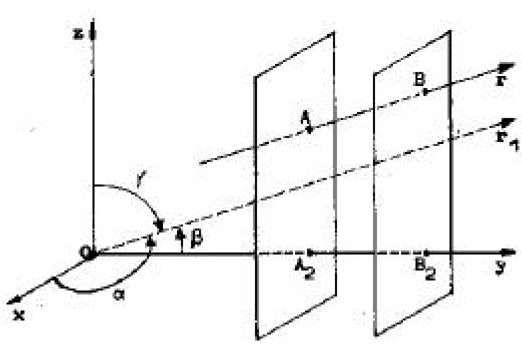
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

Relazione di ortogonalità -> 1 parametro libero:

coefficiente angolare = tg(α)

La retta nel paino è identificata da 3 parametri indipendenti.

Rette orientate (coseni direttori)



r = |AB|

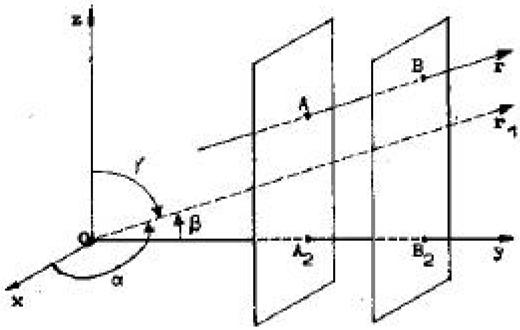
B(X,Y,Z) = $\begin{cases} X_o + r\cos(\alpha) \\ Y_o + r\cos(\beta) \\ Z_o + r\cos(\gamma) \end{cases}$

$$\cos(\alpha) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{i}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_x / |BA|$$

$$\cos(\beta) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{j}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_y / |BA|$$

$$\cos(\gamma) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{k}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_z / |BA|$$

Rette orientate (coseni direttori)



Vale la relazione fondamentale:

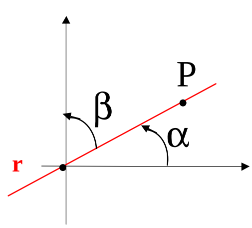
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$

(relazione di ortogonalità)

=> 2 parametri

La retta nello spazio è identificata da 5 parametri indipendenti.

Coseni direttori nel piano



$r = |P-P_o|$

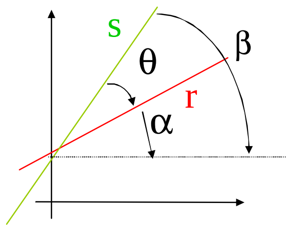
P(X,Y) =

$$r\cos(a)$$
$$r\cos(b) = r\cos(90-a) = r\sin(a)$$

I 2 coseni direttori della retta r nel piano sono quindi:

$[\cos\alpha, \sin\alpha]$

Angolo tra 2 rette orientate



Coseni direttori di s: s_x, s_y; angolo β.
Coseni direttori di r: r_x, r_y; angolo α.

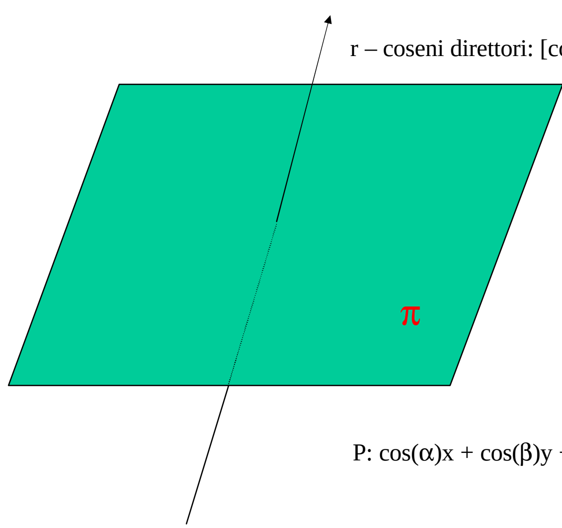
$\beta = \theta + \alpha$
$\cos(\theta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$= r_x s_x + r_y s_y$

$\cos(\theta) = r \bullet s = r_x s_x + r_y s_y \ (+ r_z s_z)$
(prodotto scalare dei versori delle due rette)

Condizione di parallelismo: $\cos(\theta) = 1 \rightarrow r_x = s_x, r_y = s_y, r_z = s_z$

Condizione perpendicolarità: $\cos(\theta) = 0 \rightarrow r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z = 0$
(prodotto scalare nullo)

I piani nello spazio



r – coseni direttori: [$\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$]

P: $\cos(\alpha)x + \cos(\beta)y + \cos(\gamma)z = d$.

Rappresentazione di forme semplici

Definizione di una base (vettoriale) per lo spazio Euclideo.

Descrizione degli elementi geometrici in questo spazio mediante numeri che specificano una posizione o una direzione.

Sommario

Richiami di algebra delle matrici

Spazi vettoriali

Geometria analitica del punto, della retta e del piano

Geometria del movimento

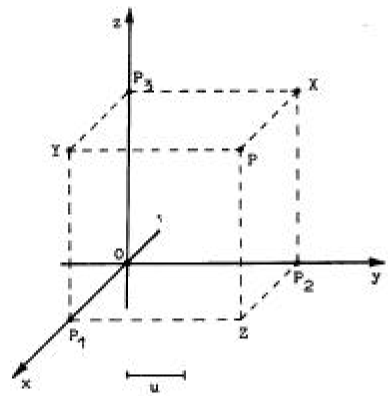
Le rotazioni

Trasformazioni

Trasformo **P** in **P'**

Cambia il sistema di riferimento

Cambia la posizione del punto



Coordinate omogenee

Spazio delle classi di equivalenza: ogni punto in coordinate cartesiane 3D corrisponde a infiniti punti nello spazio omogeneo 4D che differiscono solo per un fattore moltiplicativo *w*:

$$V(x, y, z) \text{ corrisponde a : } V(X, Y, Z, w)$$

Il passaggio tra lo spazio omogeneo e lo spazio 3D:

$$x = X / w$$
$$y = Y / w$$
$$z = Z / w$$

solitamente si sceglie *w=1*

w = 0 identifica il punto all'∞ sulla retta per l'origine, passante per V.

I coseni direttori di questa retta saranno: x/|V|, y/|V|, z/|V|.

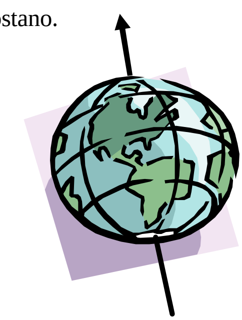
Trasformazioni affini

- rappresentate con matrici
- più trasformazioni possono essere combinate moltiplicando tra loro le matrici che rappresentano ciascuna trasformazione loro, creando una sola trasformazione matriciale.
- una trasformazione si ottiene in generale combinando trasformazioni di diverso tipo: rotazioni, scala, shear e traslazione.

Alcune trasformazioni affini (II)

Traslazione – tutti i punti si spostano della stessa quantità (vettore spostamento). Di solito si considera la traslazione del baricentro.

Rotazione – tutti i punti lungo una retta chiamata asse non si spostano.
Gli altri punti descrivono circonferenze perpendicolari all'asse.



Scala – variazione della dimensione lungo un asse.

Come trasformare gli oggetti

I vertici dell'oggetto vengono trasformati (le loro coordinate modificate) come segue.

- Denotiamo i vertici (punti) come vettore colonna ***V.***
- ***R, D*** e ***S*** sono matrici che rappresentano la rotazione, traslazione e scala
- Il punto trasformato si ottiene come:
  V'=V+D traslazione, ***D*** è un vettore di traslazione
  V'=SV scala, ***S*** è una matrice di scala
  V'=RV rotazione, ***R*** è una matrice di rotazione

Nel seguito supporremo, senza lesioni di generalità, w = 1.

Traslazione in coordinate omogenee

Vengono espresse come trasformazioni nello spazio di coordinate omogenee 4D come prodotto tra matrici.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x + 0 + 0 + T_x)$$
$$y' = (0 + y + 0 + T_y)$$
$$z' = (0 + 0 + z + T_z)$$
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

coord. omogenee

$$x^t = x'/w' = (x + T_x)/1 = x + T_x$$
$$y^t = y'/w' = (y + T_y)/1 = y + T_y$$
$$z^t = z'/w' = (z + T_z)/1 = z + T_z$$

coord. cartesiane

Scala

$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= (x.S_x + 0 + 0 + 0) \\ y' &= (0 + y.S_y + 0 + 0) \\ z' &= (0 + 0 + z.S_z + 0) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned}$$

coord. omogenee

$$\begin{aligned} x^s &= x'/w' = (x.S_x)/1 \\ y^s &= y'/w' = (y.S_y)/1 \\ z^s &= z'/w' = (z.S_z)/1 \end{aligned}$$

coord. cartesiane

Sommario

Richiami di algebra delle matrici

Spazi vettoriali

Geometria analitica del punto, della retta e del piano

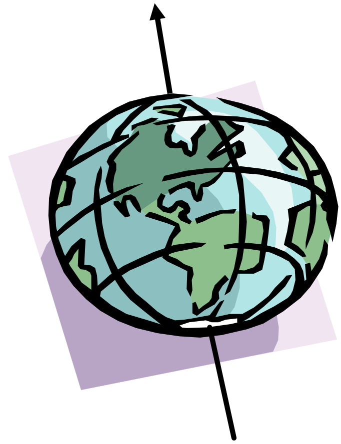
Geometria del movimento

Le rotazioni

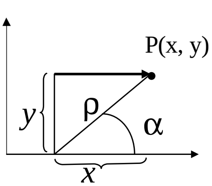
La rotazione

Ammette rappresentazioni diverse.

- Angoli sequenziali (roll, pitch e yaw).
- Angoli di Eulero.
- Coseni direttori degli assi.
- Quaternioni.

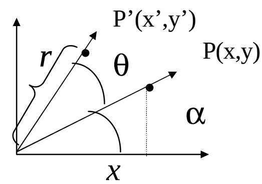


La rotazione attorno a *z (caso piano)*



$x=r\ cos a$

$y=r\ sin a$



$x' = r\ cos(a+q) = \boxed{r\ cos\ a}\ cos\ q + \boxed{r\ sin\ a}\ sin\ q$

$= x\ cos\ q + y\ sin\ q$

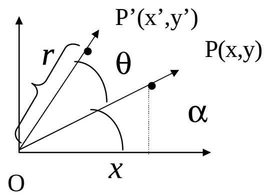
$y' = r\ sin(a+q) = -r\ cos\ a\ sin\ q + r\ sin\ a\ cos\ q$

$= -x\ sin\ q + y\ cos\ q$

La rotazione attorno a *z (forma matriciale)*

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \text{P'} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

P' = RP



Matrice di rotazione

$$\sum_{i=1}^{3} m^2{}_{ij} = 1$$

det(M) = 1

$$\sum_{i=1}^{3} m_{ij} m_{jk} = 0 \quad i \neq k$$

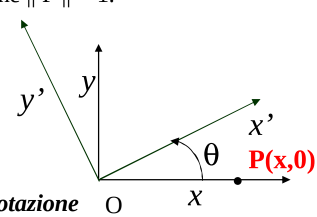
Matrice ortonormale

Significato geometrico della matrice di rotazione

Consideriamo che il punto P -> P' sia un punto appartenente all'asse x, P(x,0) e che P' appartenga ad un asse x', ottenuto ruotando il sistema di riferimento xy in x'y', di un angolo θ. Supponiamo che || P || = 1.

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \text{P'} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M contiene la proiezione degli assi del sistema di riferimento xy sugli assi di x'y'.

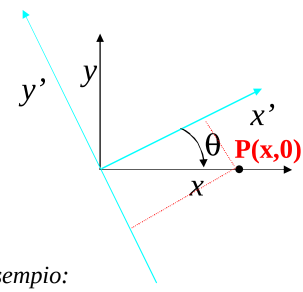
θ è angolo tra il sistema di riferimento di arrivo e quello di partenza.

Significato geometrico della matrice di rotazione

Consideriamo che il punto P -> P' sia un punto appartenente all'asse x, P(x,0) e che P' appartenga ad un asse x', ottenuto ruotando il sistema di riferimento xy in x'y' di un angolo -θ. Supponiamo che || P(x,0) || = 1

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x \bullet x' & x \bullet y' & 0 \\ y \bullet x' & y \bullet y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



M contiene la proiezione degli assi (dei versori) del sistema di riferimento xy sugli assi di x'y' .

Esempio:

x' = | P | cos(-θ) = xcos(-θ)

y' = -| P | cos[(90-θ)] = -xsin(θ)

Si può estendere a punti che non giacciano su uno dei due assi coordinati.

Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)

$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

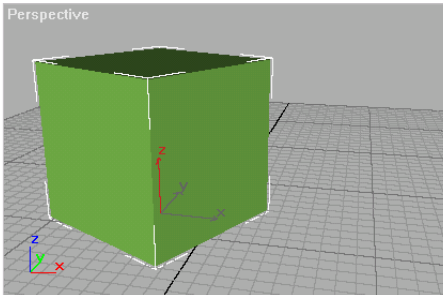
$$\begin{aligned} x' &= (x.\cos\theta + y.\sin\theta + 0 + 0) \\ y' &= (-x.\sin\theta + y.\cos\theta + 0 + 0) \\ z' &= (0 + 0 + z + 0) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned}$$

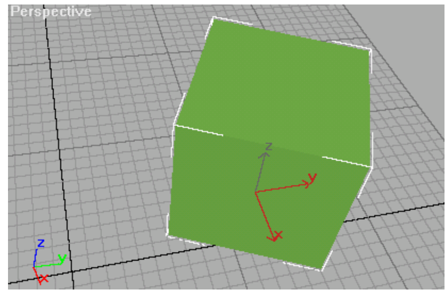
coord. omogenee

$$\begin{aligned} x^{R_z} &= x'/w' = (x.\cos\theta + y.\sin\theta)/1 \\ y^{R_z} &= y'/w' = (-x.\sin\theta + y.\cos\theta)/1 \\ z^{R_z} &= z'/w' = (z.1)/1 \end{aligned}$$

coord. cartesiane

Orientamento di un corpo rigido nello spazio



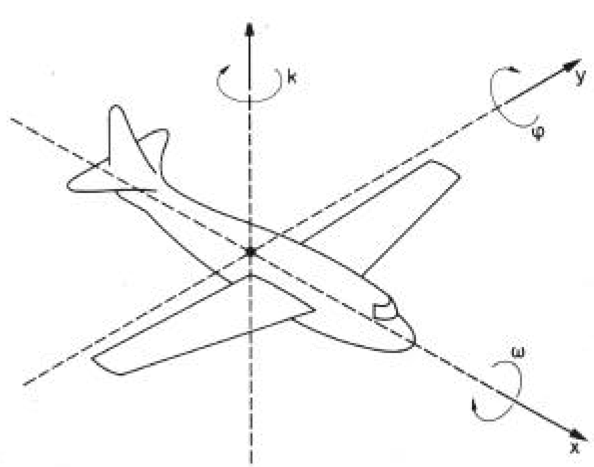


Tre parametri: tre rotazioni indipendenti.

Angoli di orientamento nello spazio 3D

Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

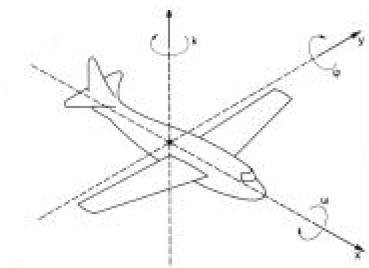
Sono 3 rotazioni sequenziali, non commutative.



Rotazione attorno ad un singolo asse

Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

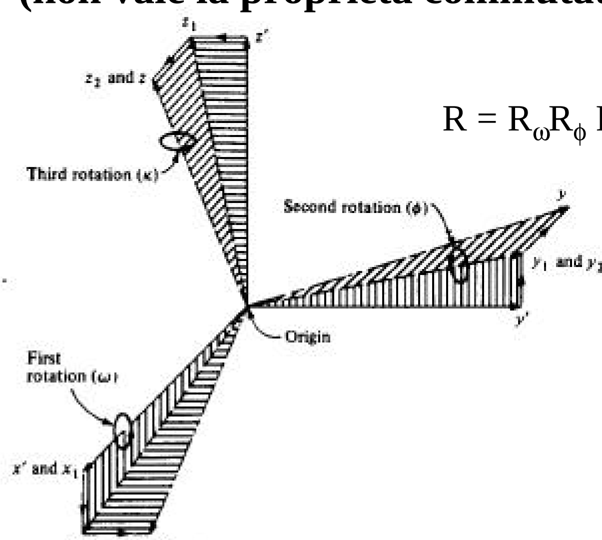
$$R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$



$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni sequenziali
(non vale la proprietà commutativa)



$$R = R_\omega R_\phi\, R_\kappa$$

Ciascuna rotazione avviene attorno ad un asse coordinato, orientato come risulta dalle rotazioni applicate in precedenza agli altri assi.

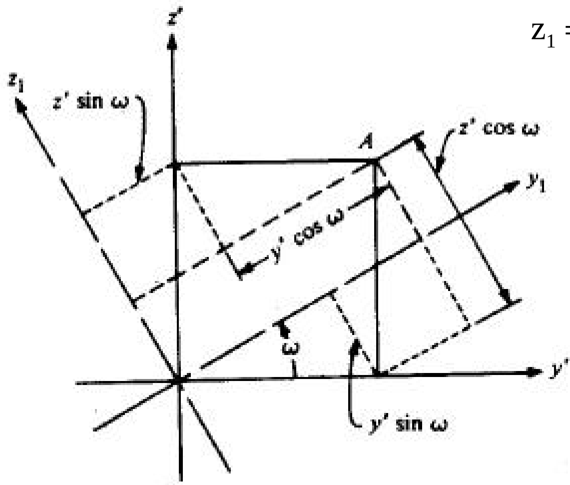
I) Rotazione attorno all'asse x (roll)

$$\begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix} = \quad \mathbf{P_1} = \mathbf{R\,P'} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x$$

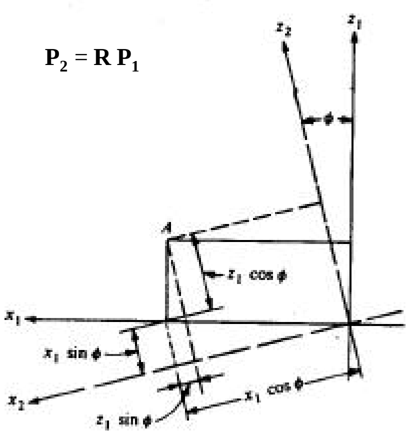
$$y_1 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$

$$z_1 = -y'\sin\omega + z'\cos\omega$$



II) Rotazione attorno all'asse y (pitch)

$$\mathbf{P_2} = \mathbf{R\,P_1}$$



$$x_2 = x_1\cos\phi + z_1\sin\phi$$

$$y_2 = y_1$$

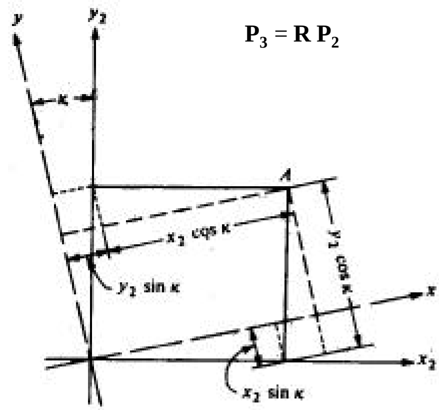
$$z_2 = -x_1\sin\phi + z_1\cos\phi$$

$$x_2 = x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi$$

$$y_2 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$

$$z_2 = -x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

III) Rotazione attorno all'asse z (yaw)

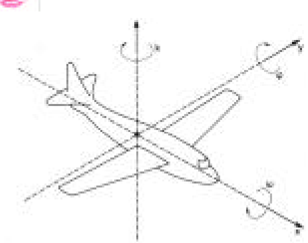


$P_3 = R\,P_2$

$$x_3 = x_2 \cos k + z_2 \sin k$$
$$y_3 = -x_2 \sin k + z_2 \cos k$$
$$z_3 = z_2$$

$$x_3 = [x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\cos k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\sin k$$
$$y_3 = -[x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\sin k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\cos k$$
$$z_3 = -x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

Dalle rotazioni alla matrice di rotazione



Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(j)\cos(k) & -\cos(j)sin(k) & -sin(f) \\ \cos(w)sin(k) - sin(w)sin(j)\cos(k) & \cos(w)\cos(k) + sin(w)sin(j)sin(k) & -sin(w)\cos(j) \\ sin(w)sin(k) + \cos(w)sin(j)\cos(k) & sin(w)\cos(k) - \cos(w)sin(j)sin(k) & \cos(w)\cos(j) \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.

Rotazioni "*semplici*" utilizzate dai programmi di animazione, gestione matriciale *efficiente* del calcolo.

La rototraslazione in forma matriciale

P’ = RP + T => P’ = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione

Composizione di trasformazioni

- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

  $$V'' = A_2 A_1 V = A_2(A_1 V) = (A_2 A_1) V$$

  – la trasf. A_1 viene applicata per prima!

- ricordiamo che il prodotto di rotazioni <u>non è *commutativo*</u>: $R_2R_1 ? R_1R_2$, mentre vale la proprietà associativa: $A_2(A_1V) = (A_2A_1)V$.

- ***Tutte le traslazioni, rotazioni e variazioni di scala, possono essere rappresentata in un’unica matrice.***

Trasformazioni inverse

- Denotiamo le inverse come le matrici affini: T^{-1}, S^{-1}, R^{-1}.
- La traslazione inversa si ottiene *negando* i coefficienti di traslazione.
- La scala inversa si ottiene prendendo il *reciproco* dei coefficienti.
- La rotazione inversa si ottiene *negando* l'angolo di rotazione. Matrice trasposta. Si può verificare invertendo il segno e l'ordine delle rotazioni:

$$R = R_{\omega} R_{\phi} R_{\kappa} \Rightarrow R^T = R_{-\kappa} R_{-\phi} R_{-\omega}$$

La trasformazione inversa in forma matriciale

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R^T R P = +R^T P' - R^T T \Rightarrow P = A^{-1} P'}$

Proiezione di **T** sugli assi di arrivo: $\mathbf{r_i \cdot T}$

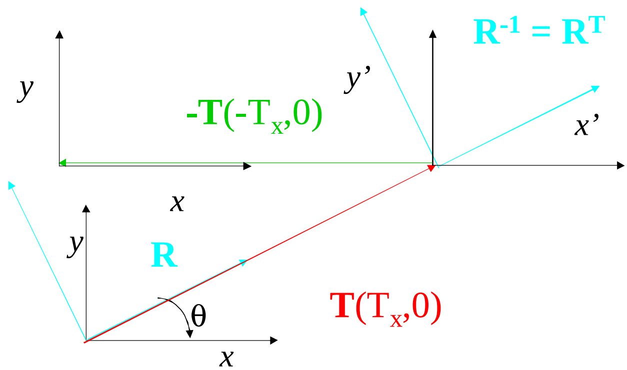
$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z \\ r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z \\ r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione (inversa)

Vettore di traslazione (inverso)

Perchè $-R^T T$?

Solo così applicando trasformata diretta ed inversa riportano un sistema di riferimento nella posizione iniziale.



$R^T T$ è la proiezione del vettore traslazione sul sistema di riferimento ruotato.

Sommario

Richiami di algebra delle matrici

Spazi vettoriali

Geometria analitica del punto, della retta e del piano

Geometria del movimento

Le rotazioni