



# Animazione Digitale

## lezione 3

**N. Alberto Borghese**

- Cinematica diretta.
- Cinematica inversa.
- Tecnica della Pseudo-inversa.



## Riassunto

- Il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della geometria (lunghezze dei segmenti) e dei parametri liberi (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).
- Le rotazioni vengono definite in un sistema di riferimento locale.
- Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre....

$$\mathbf{P}_e^{\text{ABS\_ABS}} = (\mathbf{A}_{\text{ABS\_ABS}} \mathbf{A}_{\text{P0\_ABS}} \mathbf{A}_{\text{P0\_L0}} \mathbf{A}_{\text{P1\_L0}} \mathbf{A}_{\text{P1\_L1}}) \mathbf{P}_e$$
$$\mathbf{P}_e = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

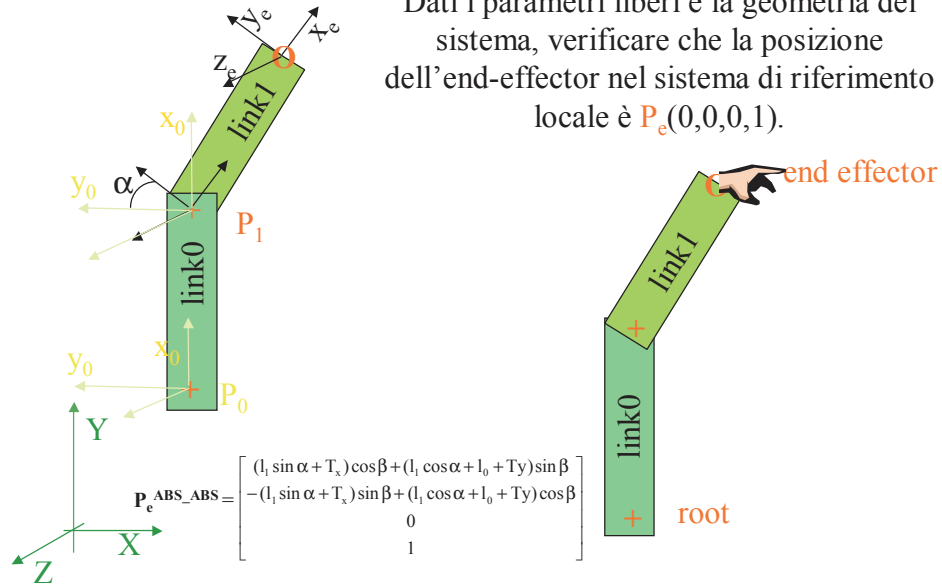
fattorizzare le matrici di trasformazione.



## Dalla radice all'end-effector



Dati i parametri liberi e la geometria del sistema, verificare che la posizione dell'end-effector nel sistema di riferimento locale è  $P_e(0,0,0,1)$ .



## Soluzione algebrica alla trasformazione inversa



$$P_e^{ABS\_ABS} = (A_{ABS\_ABS} A_{P0\_ABS} A_{P0\_L0} A_{P1\_L0} A_{P1\_L1}) P_e$$

$$(A_{P1\_L1})^{-1} (A_{P1\_L0})^{-1} (A_{P0\_L0})^{-1} (A_{P0\_ABS})^{-1} (A_{ABS\_ABS})^{-1} P_e^{ABS\_ABS} = P_e$$

Si parte dalla radice e ci si muove verso l'end-effector.  
Ciascuna trasformazione è l'inverso del caso diretto.

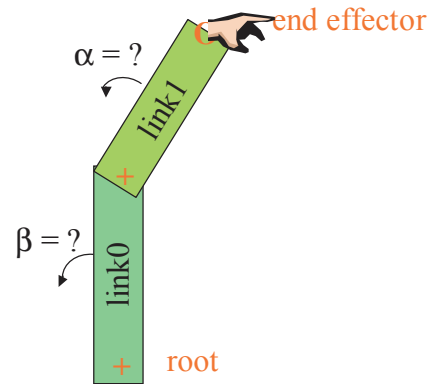
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{11} T_x + r_{21} T_y + r_{31} T_z \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{12} T_x + r_{22} T_y + r_{32} T_z \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{13} T_x + r_{23} T_y + r_{33} T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Progetto semplice



Definire una struttura articolata a piacere.  
Misurare la posizione dei joint.  
Stimare un valore possibile per i parametri liberi  
della struttura.



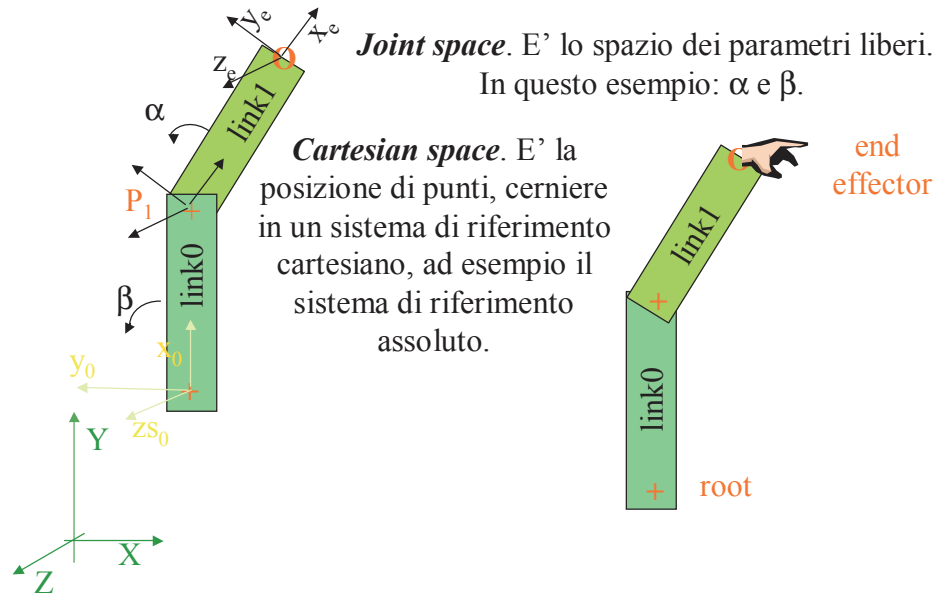
## La cinematica



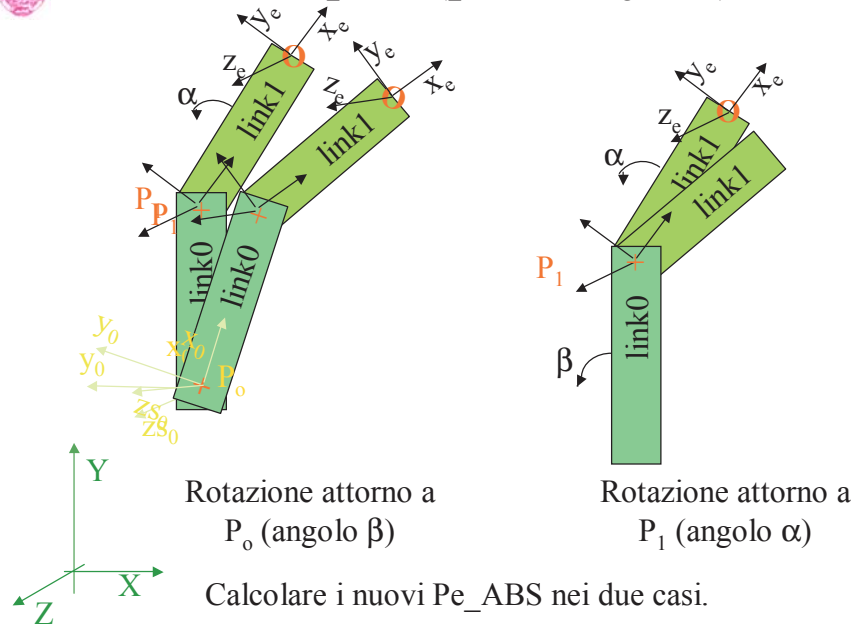
La cinematica studia le proprietà del movimento  
indipendentemente dalle cause che lo producono.



# La cinematica degli scheletri



## Joint space (peso dei joint)



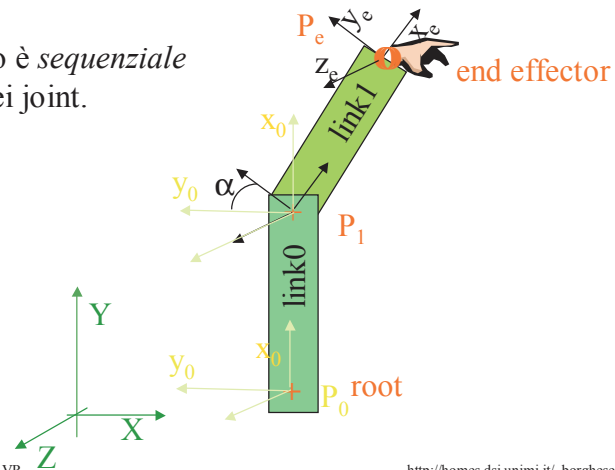


## La cinematica diretta



Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento di ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint.



## La cinematica diretta (matrici)



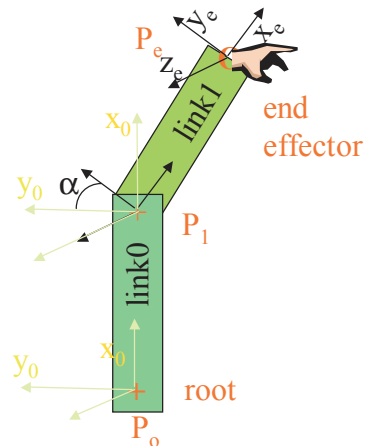
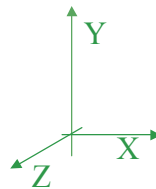
$$P_e^{ABS\_ABS} = (A_{ABS\_ABS} A_{P0\_ABS} A_{P0\_L0} A_{P1\_L0} A_{P1\_L1}) P_e$$

A è funzione di:

- Geometria
- Parametri liberi

$$A_{P0\_L0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{P1\_L0} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





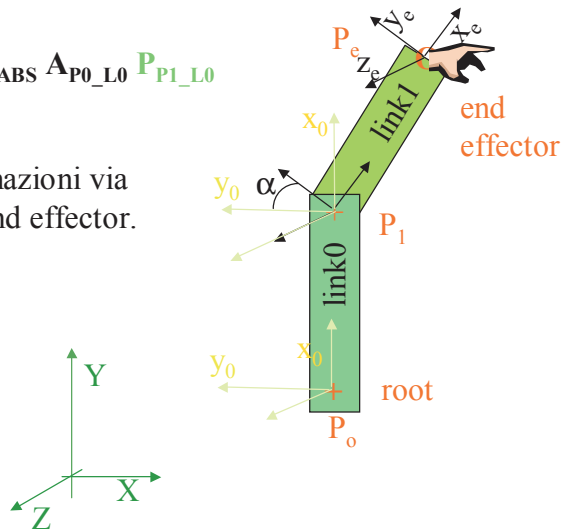
## La cinematica diretta (matrici, II)



$$P_e^{ABS\_ABS} = (A_{ABS\_ABS} A_{P0\_ABS} A_{P0\_L0} A_{P1\_L0} A_{P1\_L1}) P_e$$

$$P_e^{P1\_L0} = A_{ABS\_ABS} A_{P0\_ABS} A_{P0\_L0} P_{P1\_L0}$$

Si aggiungono trasformazioni via via che si raggiunge l'end effector.



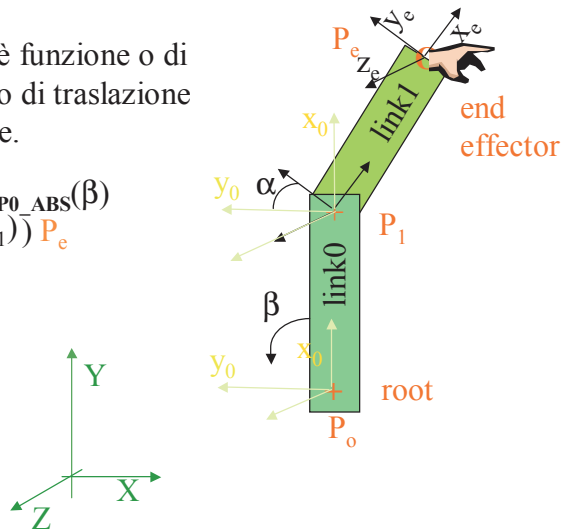
## La cinematica diretta (matrici, III)



$$P_e^{ABS\_ABS} = (A_{ABS\_ABS} A_{P0\_ABS} A_{P0\_L0} A_{P1\_L0} A_{P1\_L1}) P_e$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di traslazione o di rotazione.

$$P_e^{ABS\_ABS} = A_{ABS\_ABS}(T) A_{P0\_ABS}(\beta) A_{P0\_L0}(l_0) A_{P1\_L0}(\alpha) A_{P1\_L1}(l_1) P_e$$





## Definizione matriciale della cinematica



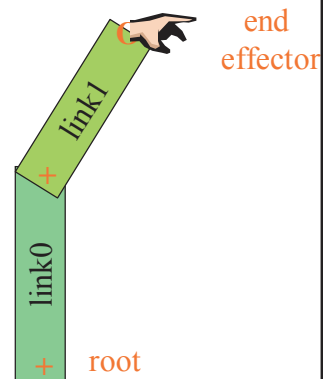
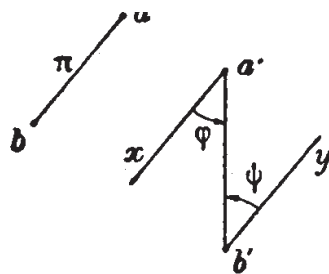
- Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
- Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
- Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.
  
- Notazione molto generale (approccio costruttivo).
- Notazione prolissa.



## La cinematica degli scheletri



Qualsiasi spostamento rigido può essere ricondotto in infiniti modi ad uno spostamento rototraslatorio con lo stesso vettore rotazione (teorema di Chasles).



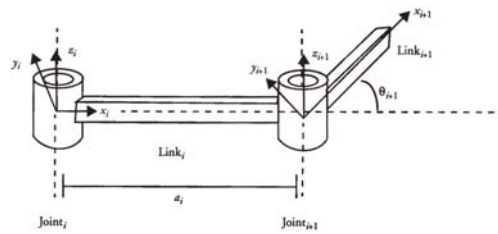


# Denavit-Hartenberg notation



*Ipotesi:*

- Cerniere 2D.
- L'asse z è orientato come l'asse di rotazione.
- L'asse x è orientato da  $P_i$  a  $P_{i+1}$ .



$$A_i^{i+1} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{i+1}) & \sin(\vartheta_{i+1}) & 0 & l_{i+1} \\ -\sin(\vartheta_{i+1}) & \cos(\vartheta_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



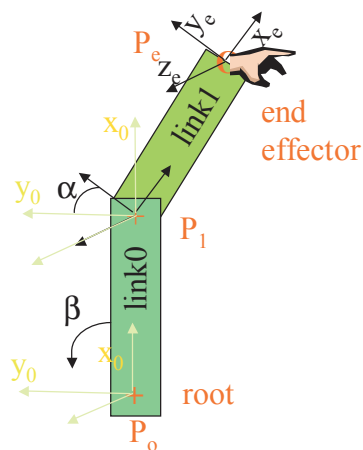
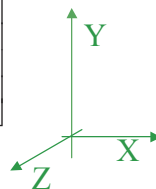
# DH notation applicata al nostro esempio



$$A_i^{i+1} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{i+1}) & \sin(\vartheta_{i+1}) & 0 & l_{i+1} \\ -\sin(\vartheta_{i+1}) & \cos(\vartheta_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^e = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & l_1 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & l_0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$







## DH notation applicata al nostro esempio (II)



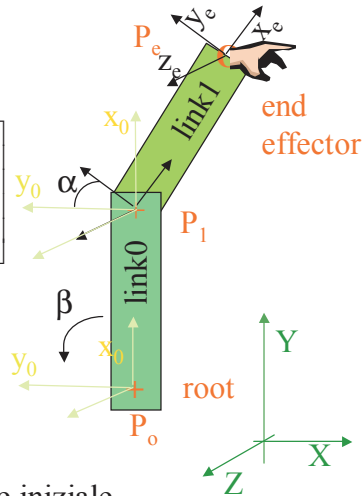
$$A_i^{i+1} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{i+1}) & \sin(\vartheta_{i+1}) & 0 & l_{i+1} \\ -\sin(\vartheta_{i+1}) & \cos(\vartheta_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{ABS}^0 = \begin{bmatrix} \cos(-90) & \sin(-90) & 0 & T_x \\ -\sin(-90) & \cos(-90) & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & T_x \\ 1 & 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_e^{ABS\_ABS} = (A_{ABS\_ABS} A_{P0\_ABS} A_{P0\_L0} A_{P1\_L0} A_{P1\_L1}) P_e$$

$$P_e^{ABS\_ABS} = (A_{ABS}^0 A_0^1 A_1^{end}) P_e$$

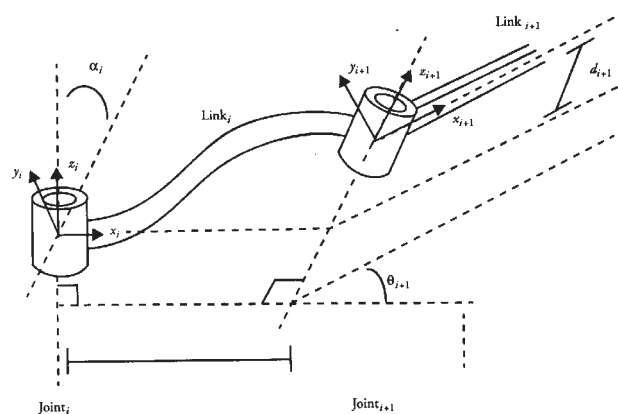
Verificare che risulta la trasformazione iniziale




## DH notation generalizzata




- La notazione DH riguarda solamente joint con 1 unico grado di libertà.

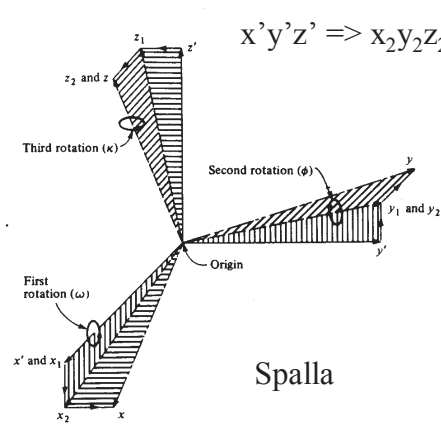


*Joint prismatici.* Ci si può ricondurre al caso precedente, utilizzando trasformazioni geometriche.



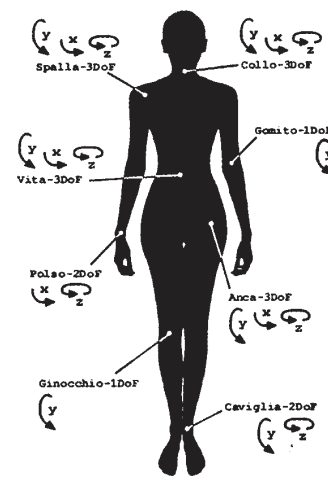
# DH per cerniere 3D





$x'y'z' \Rightarrow x_2y_2z_2$


Spalla




3 rotazioni sequenziali, 3 trasformazioni ad 1 grado di libertà.

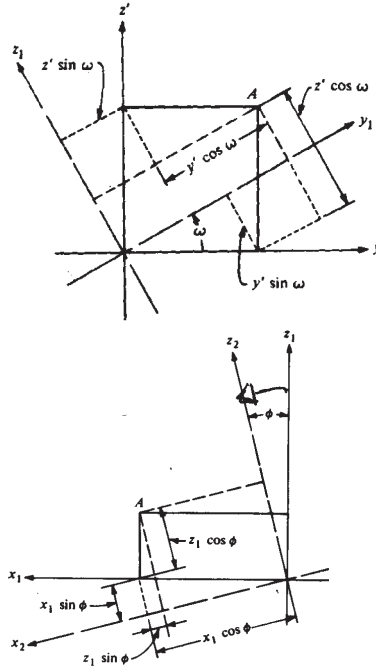
Laboratory of Motion Analysis & Virtual Reality, MAVR

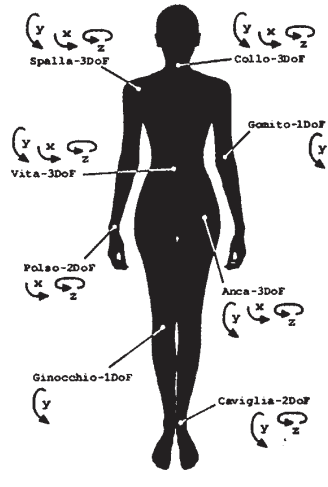
<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



# Cerniere 3D





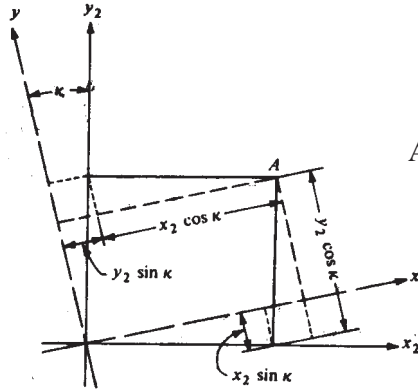


Laboratory of Motion Analysis & Virtual Reality, MAVR

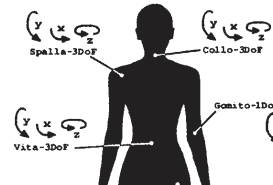
<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



## Cerniere 3D (II)



$$A_{spalla} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & l_{braccio} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos(k) & -\cos(\varphi)\sin(k) & -\sin(k) \\ \cos(w)\sin(k) - \sin(w)\sin(\varphi)\cos(k) & \cos(w)\cos(k) + \sin(w)\sin(\varphi)\sin(k) & -\sin(w)\cos(\varphi) \\ \sin(w)\sin(k) + \cos(w)\sin(\varphi)\cos(k) & \sin(w)\cos(k) - \cos(w)\sin(\varphi)\sin(k) & \cos(w)\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$R = A(\omega) A(\phi) A(k)$$



## Riassunto: la cinematica diretta degli scheletri

Progetto. Animazione della cinematica diretta di scheletri.

Data la sequenza di angoli (**relativi**) è possibile determinare istante per istante la posizione dello scheletro.

Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?



## La cinematica inversa



Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.

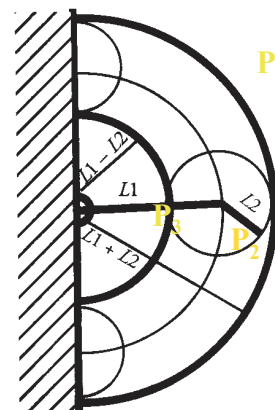
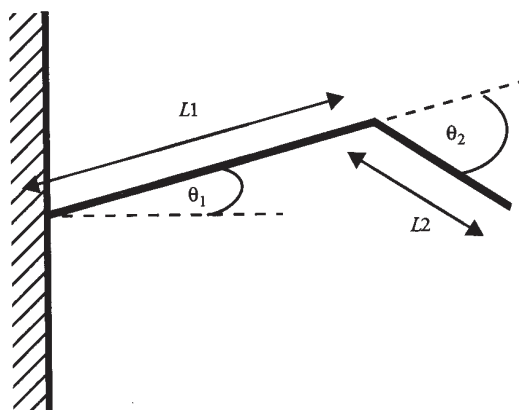


Soluzione diretta  
Soluzione linearizzata

Problema sotto-determinato (over-constrained).  
Comportamento stereotipato. Perché?



## Soluzione diretta

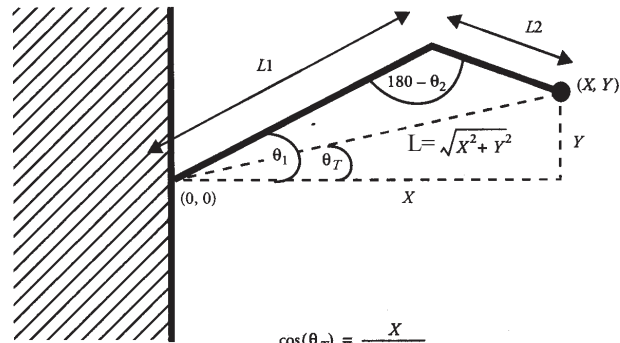


**Spazio di lavoro:**  $L_1 - L_2 \leq \sqrt{X^2 + Y^2} \leq L_1 + L_2$

P<sub>1</sub> - nessuna soluzione.  
P<sub>2</sub> - una soluzione.  
P<sub>3</sub> - due soluzioni.



## Soluzione diretta (calcolo)



$$\cos(\theta_1) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

E' un problema di trigonometria!

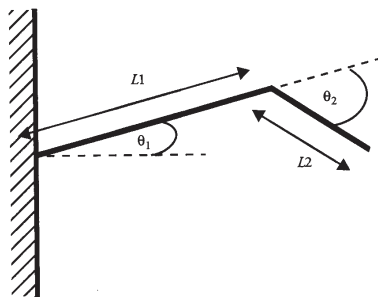
- Calcolo  $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$
- Teorema di Carnot per calcolare  $\cos\theta_2$ :  $\cos(\theta_2) = (L_1^2 + L_2^2 - L^2) / (2L_1L_2)$
- Calcolo di  $\cos\theta_T$ :  $\cos(\theta_T) = X / \sqrt{X^2 + Y^2}$
- Teorema di Carnot per calcolare  $\cos\theta_1$ :  $\cos(\theta_R) = (L_1^2 + L^2 - L_2^2) / (2L_1L)$

Laboratory of Motion Analysis & Virtual Reality, MAVR

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>

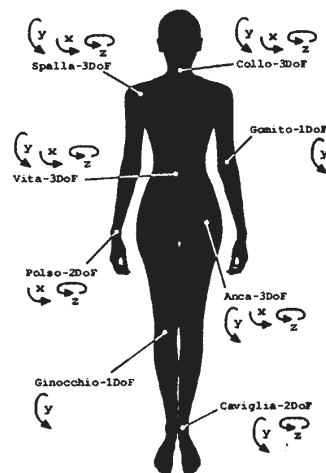


## Cerniere 3D



$\infty^1$  soluzioni

NB: gli umani ne scelgono una sola.



*Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.*

Laboratory of Motion Analysis & Virtual Reality, MAVR

<http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/>



## Soluzione approssimata



Consideriamo la trasformazione joint  $\rightarrow$  end\_point.

$$\mathbf{P} = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots | l_0, l_1, \dots).$$

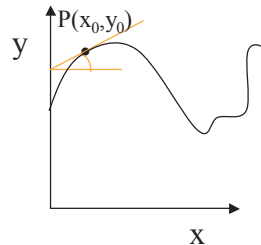
E' una forma complessa a cui non si possono applicare trasformazioni lineari. Cosa si può fare?

Linearizzare!

$$y_0 = f(x_0)$$

$$dy = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_0} dx^2 + \dots$$

$$y - y_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x$$



## Il Jacobiano



Consideriamo la trasformazione joint  $\rightarrow$  end\_point.

$$\mathbf{P} = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots | l_0, l_1, \dots).$$

$$P_x = f_x(\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots | l_0, l_1, \dots).$$

$$P_y = f_y(\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots | l_0, l_1, \dots).$$

$$P_z = f_z(\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots | l_0, l_1, \dots).$$

Consideriamo  $\mathbf{Z}_0 = [\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \dots]$  il valore dei parametri liberi.

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_0} \\ P_y - P_{y_0} \\ P_z - P_{z_0} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \gamma} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \delta} \right|_{z_0} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \gamma} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \delta} \right|_{z_0} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \gamma} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \delta} \right|_{z_0} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_0 \\ \beta - \beta_0 \\ \gamma - \gamma_0 \\ \delta - \delta_0 \\ \dots \end{bmatrix}$$



## Osservazioni sul Jacobiano

$$\begin{matrix} P_x - P_{x_0} \\ P_y - P_{y_0} \\ P_z - P_{z_0} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \gamma} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_x(\cdot)}{\partial \delta} \right|_{z_0} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \gamma} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_y(\cdot)}{\partial \delta} \right|_{z_0} & \dots \\ \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \gamma} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial f_z(\cdot)}{\partial \delta} \right|_{z_0} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_0 \\ \beta - \beta_0 \\ \gamma - \gamma_0 \\ \delta - \delta_0 \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{P}_e = \mathbf{J}(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) \Delta \mathbf{Z}$$

Consideriamo  $\mathbf{Z} = [\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots]$  il valore dei parametri liberi.

E' un'equazione (matriciale) lineare  $\Delta \mathbf{Z} \rightarrow \Delta \mathbf{P}_e$

*Siamo ancora nel dominio della cinematica diretta.*



## Jacobiano e velocità

$$d\mathbf{P}_e = \mathbf{J}(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{Z} \rightarrow d\mathbf{P}_e / dt = \mathbf{J}(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{Z} / dt$$

Consideriamo  $\mathbf{Z} = [\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots]$  il valore dei parametri liberi.

$$\mathbf{V}_{\mathbf{P}_e}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{L}) \mathbf{V}_{\mathbf{Z}}(t)$$



## Cinematica diretta



$$\mathbf{P}_e^{P1\_L0} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_e^{ABS\_ABS} = \mathbf{A}_{ABS\_ABS} \mathbf{P}_e^{P1\_L0} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta + T_x \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin(\beta) - l_1 \sin \alpha \cos \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ABS\_ABS} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & T_x \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Second effector  
 root

Laboratory of Motion Analysis & Virtual Reality, MAVR http://homes.dsi.unimi.it/~borghese/



## Il Jacobiano dell'esempio



$$\mathbf{A}_{ABS\_ABS} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta + T_x \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin(\beta) - l_1 \sin \alpha \cos \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{A}(\alpha, \beta, T_x, T_y | l_0, l_1, \dots) [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

Consideriamo  $\mathbf{Z} = [\alpha, \beta, T_x, T_y]$  il valore dei parametri liberi.

$$\text{Calcolo: } d\mathbf{P}_e = \mathbf{J}(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{Z} \Rightarrow d\mathbf{P}_e / dt = \mathbf{J}(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{Z} / dt$$





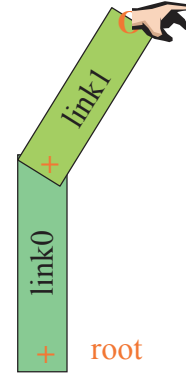
## Il Jacobiano dell'esempio (II)



$$dP_e = J(Z, L) dZ$$

Consideriamo  $Z_0 = [\alpha_0, \beta_0, T_{x0}, T_{y0}]$  il valore dei parametri liberi.

$$J(Z_0) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial A_1(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial A_1(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial A_1(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial A_1(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{z_0} \\ \left. \frac{\partial A_2(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial A_2(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial A_2(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial A_2(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{z_0} \\ \left. \frac{\partial A_3(\cdot)}{\partial \alpha} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial A_3(\cdot)}{\partial \beta} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial A_3(\cdot)}{\partial T_x} \right|_{z_0} & \left. \frac{\partial A_3(\cdot)}{\partial T_y} \right|_{z_0} \end{bmatrix}$$



## Il Jacobiano dell'esempio (III)



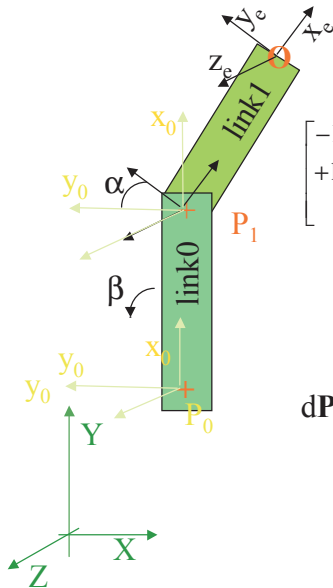
$$P_e = A(\alpha, \beta, T_x, T_y | l_0, l_1, \dots) [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad dP_e = J(Z, L) dZ$$

$$A_{ABS\_ABS} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta + T_x \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J(Z, L) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha \cos \beta - l_1 \cos \alpha \sin \beta & -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta & 1 & 0 \\ +l_1 \sin \alpha \cos \beta - l_1 \cos \alpha \cos \beta & (l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta + l_1 \sin \alpha \sin \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## Significato geometrico del Jacobiano



$$J(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) =$$

$$\begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha \cos \beta - l_1 \cos \alpha \sin \beta & -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta & 1 & 0 \\ +l_1 \sin \alpha \cos \beta - l_1 \cos \alpha \cos \beta & (l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta + l_1 \sin \alpha \sin \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta = 90 \text{ gradi}$$

$$d\mathbf{P}_e = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \alpha & -(l_1 \cos \alpha + l_0) & 1 & 0 \\ l_1 \sin \alpha & l_1 \cos \alpha + l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \\ dT_x \\ dT_y \end{bmatrix}$$



## Cinematica inversa con Jacobiano



$$d\mathbf{P}_e = J(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{Z} \rightarrow d\mathbf{P}_e / dt = J(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{Z} / dt$$

Consideriamo  $\mathbf{Z} = [\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots]$  il valore dei parametri liberi.

$$d\mathbf{Z} = J^{-1}(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{P}_e$$

E' un sistema lineare: esiste 1, nessuna o  $\infty$  soluzioni.



# I sistemi lineari



$$dP_e = J(Z, L) dZ$$

$$L = AX$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = l_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = l_2$$

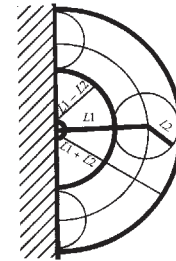
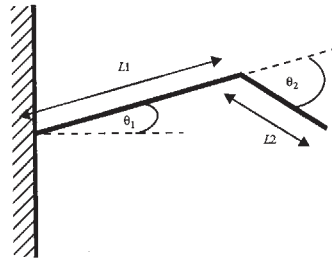
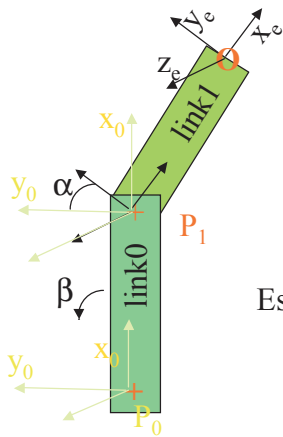
.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = l_m$$

$$\text{Se } n = m \quad X = A^{-1}L \quad \det(A) \neq 0$$



# Sistema lineare non sovradeterminato



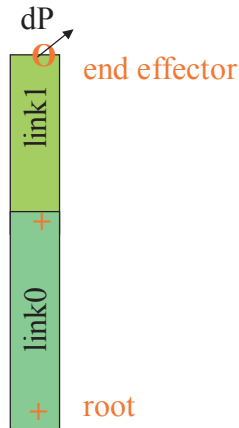
Esistono dei valori di  $\alpha$  e  $\beta$  per cui il sistema non è risolubile per alcuni valori di  $dP$ .

$$J(Z, L)$$

$$\begin{bmatrix} dP_{ex} \\ dP_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha \cos \beta - l_1 \cos \alpha \sin \beta & -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ +l_1 \sin \alpha \cos \beta - l_1 \cos \alpha \sin \beta & (l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta + l_1 \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$



## Risolubilità



Non esiste una soluzione che mi dia uno spostamento in direzione  $dP$

Il determinante del Jacobiano è nullo.

*NB Il valore del Jacobiano è istantaneo.*



## Soluzione dei sistemi lineari ( $m < n$ )

$$AX = L \quad m < n$$

Sistema sovra-determinato.

$$A^T A X = A^T L \quad A^T A X = A^T L$$

Equazioni normali

$$(A^T A)^{-1} (A^T A) X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

$$d\theta = (J^T J)^{-1} J^T dP_e$$

$d\theta$  è tale per cui  $|dP_e - J d\theta|$  è minima.

$$d\theta = J^+ dP_e$$

$J^+$  è la pseudo-inversa.



## Soluzione dei sistemi lineari ( $m > n$ )



$$AX = L \quad m > n \quad \text{Sistema sovra-parametrizzato.}$$

$$A^TAX = A^TL \quad A^TAX = A^TL \quad (A^TA)^{-1}(A^TA)X = (A^TA)^{-1}A^TL$$

Equazioni normali

$$\text{Det}(A^TA) = 0 \quad [U \ W \ V] = \text{svd}(A^TA)$$

$$(A^TA)^{-1} = [V^T \ W^{-1} \ U^T]$$

$$d\theta = (J^T J)^{-1} J^T dPe = J^+ dPe$$

$d\theta$  ha norma minima tra tutte le possibili soluzioni



## Esempio ( $m > n$ )



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \quad X = [1 \ 1 \ 1]$$

$$(A^TA) = \text{COVA} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 25 \end{bmatrix} \quad \det(\text{COVA}) = 0 \quad X = (\text{COVA})^{-1}A^TL???$$

$[U \ W \ V] = \text{svd}(\text{COVA})$

$$U = \begin{bmatrix} 0.38306 & -0.62474 & -0.68041 \\ 0.0136 & -0.732702 & 0.68041 \\ 0.9236 & 0.269898 & 0.27216 \end{bmatrix} \quad V = U^T \quad W = \begin{bmatrix} 29.147 & 0 & 0 \\ 0 & 1.852 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\text{COVA})^{-1} = V^T * 1/W * U \Rightarrow \text{COVA\_INV} = \begin{bmatrix} 0.2157 & 0.2472 & -0.0788 \\ 0.2472 & 0.28978 & -0.10631 \\ -0.0788 & -0.1063 & 0.068587 \end{bmatrix}$$



## Esempio ( $m > n$ )



$$\text{COVA\_INV} = \begin{bmatrix} 0.2157 & 0.2472 & -0.0788 \\ 0.2472 & 0.28978 & -0.10631 \\ -0.0788 & -0.1063 & 0.068587 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = (\text{COVA})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}$$

$$\text{SOL} = [1.185 \quad 0.815 \quad 0.9259] \quad \text{norma}(\text{SOL}) = 1.7105$$
$$\mathbf{X} = [1 \quad 1 \quad 1] \quad \text{norma}(\mathbf{X}) = \text{sqrt}(3) = 1.732$$



## Polarizzazione della soluzione



Importanza dei gradi di libertà dell'end-point (soddisfazione dei requisiti di spostamento dei vari gradi di libertà).

Importanza dei gradi di libertà dei joint (deviazione rispetto ad una resting position).

$$d\mathbf{Z} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Z}, \mathbf{L}) d\mathbf{P}_e$$

$$d\mathbf{P}_e = \begin{bmatrix} -l_1 \cos\alpha & -(l_1 \cos\alpha + l_0) & 1 & 0 \\ l_1 \sin\alpha & l_1 \cos\alpha + l_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} d\alpha \\ d\beta \\ dT_x \\ dT_y \end{matrix}$$



## Peso diverso ai diversi gradi di libertà



$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = l_1 + v_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = l_2 + v_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = l_m + v_m$$

$$\min_{\{x_i\}} \sum_i v_i^2$$

Funzione da minimizzare: somma dei residui.

Rumore Gaussiano a media nulla sui residui => stima ottima degli  $\{x_i\}$



## Formulazione matriciale



$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = l_1 + v_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = l_2 + v_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = l_m + v_m$$

$$\min_{\{x_i\}} \sum_i v_i^2 = \min_{\{x_i\}} (AX - L)^2$$

$$2A^T(AX - L) = 0 \quad \rightarrow \quad A^TAX = A^TL$$



## Formulazione matriciale pesata



$$p_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = l_1 + v_1$$

$$p_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = l_2 + v_2$$

.....

$$p_m: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = l_m + v_m$$

I pesi danno l'affidabilità delle osservazioni. Nel nostro caso pesano l'importanza delle equazioni.

$$PAX = P(L+V) \rightarrow P(AX-L) = PV \quad P \text{ è matrice diagonale } m \times m$$



## Formulazione matriciale pesata (II)



$$p_1 a_{11}x_1 + p_1 a_{12}x_2 + p_1 a_{13}x_3 + \dots + p_1 a_{1n}x_n - p_1 l_1 = p_1 v_1$$

$$p_2 a_{21}x_1 + p_2 a_{22}x_2 + p_2 a_{23}x_3 + \dots + p_2 a_{2n}x_n - p_2 l_2 = p_2 v_2$$

.....

$$p_m a_{m1}x_1 + p_m a_{m2}x_2 + p_m a_{m3}x_3 + \dots + p_m a_{mn}x_n - p_m l_m = p_m v_m$$

$$\min_{\{x_i\}} \sum_i (p_i v_i)^2 = \min_{\{x_i\}} (PAX - PL)^2$$

$$2PA^T(PAX - PL) = 0 \rightarrow P(A^T P A)X = P A^T P L$$

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

$$d\theta = (J^T P J)^{-1} J^T P dP e$$

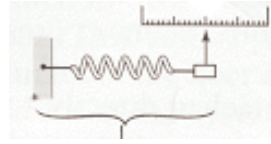




## Introduzione di vincoli elastici



Elemento elastico:  $\Delta \theta = -k(\theta - \theta_0)$



(attività muscolare)

Vincolo soft a mantenere una certa configurazione angolare:

$$H = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\vartheta_i - \vartheta_{i_0})^\psi \quad \psi \text{ pari} \quad (\psi = 2 \text{ è energia potenziale})$$

Minimo dell'energia è:

$$z = dH / d\vartheta = \psi \sum_{i=1}^n \alpha_i (\vartheta_i - \vartheta_{i_0})^{\psi-1}$$



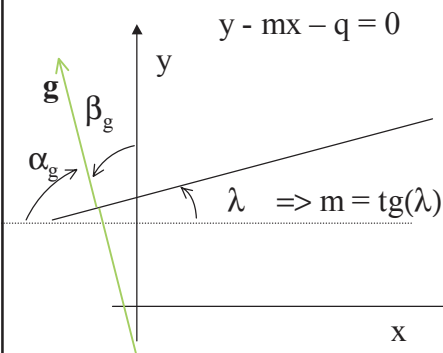
## Gradiente



$$f(x, y, z) = 0$$

$$\vec{g} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{dy} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{dz}$$

### Significato geometrico



$$\vec{g} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{dy} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{dz}$$

$$\vec{g}_1 = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$\cos(\alpha_g) = -m / (1+m^2)^{1/2} = -\sin(\lambda)$$

$$\cos(\beta_g) = 1 / (1+m^2)^{1/2} = \cos(\lambda)$$



## Vincolo elastico e cinematica inversa



$$d\theta = (J^T J)^{-1} J^T dP_e$$

$$d\theta = J^+ dP_e$$

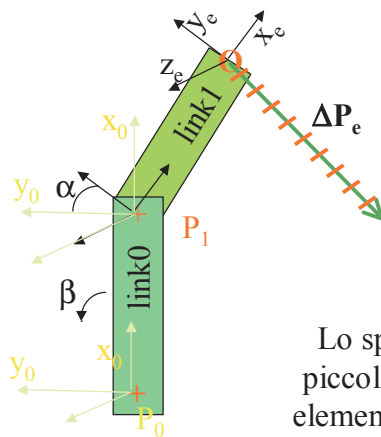
Ricavo  $d\theta$ , il nuovo valore di  $\theta$  dipende dal vincolo di elasticità:

$$z = dH / d\vartheta = \psi \sum_{i=1}^n \alpha_i (\vartheta_i - \vartheta_{i_0})^{\psi-1}$$

$$\theta^{t+1} = \theta^t - \nabla_{\theta} H$$



## Cinematica inversa



Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.



## Riassunto



La cinematica inversa consente di determinare la traiettoria dei joint, data la traiettoria desiderata dell'end-point.

La soluzione geometrica o analitica è possibile per scheletri molto semplici.

Per scheletri complessi si utilizza una soluzione linearizzata basata sul Jacobiano. Calcolo della pseudo-inversa.

Possibilità di polarizzare i joint o il peso dei gradi di libertà.

Sperimentare la soluzione analitica per un problema di path-planning con i diversi vincoli possibili.