Trasformazioni

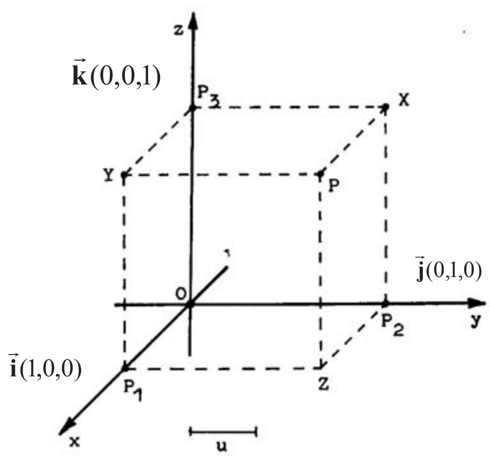
Lucidi tratti dalla pagina WEB:

http://klee.usr.dsi.unimi.it/~dan/PGL/doc/slides/

Del prof. D. Marini

1

La rappresentazione analitica di un punto



$$P_x = \mathbf{P} \bullet \mathbf{i}$$
$$P_y = \mathbf{P} \bullet \mathbf{j}$$
$$P_z = \mathbf{P} \bullet \mathbf{k}$$

2

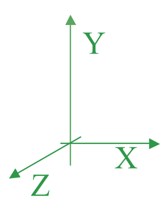
Vettori

- Sono identificati da 2 punti: P e Q. Sono caratterizzati da modulo (distanza tra P e Q), orientamento e verso.

Versori (vettori di modulo unitario)

• I versori: ***i, j, k*** sono i vettori di lunghezzza unitaria che individuano gli assi cartesiani, sono ortogonali, e formano una terna di vettori *ortonormali*, una *base* dello spazio cartesiano

3



Lo spazio Euclideo

- lo spazio può essere orientato in due modi:
  - mano destra: avvolgete la mano all’asse z e puntate il pollice verso di voi, x viene a destra e y va verso l’alto (terna destrorsa).
  - mano sinistra: avvolgete la mano all’asse z e puntate il pollice verso di voi, x viene a sinistra e y va verso l’alto
- questo definisce il *world coordinate system* in cui sono definiti gli oggetti

4

Definizione degli oggetti

- Gli oggetti possono essere definiti in un proprio sistema di riferimento locale:
  - i vertici dell'oggetto sono definiti rispetto a un orientamento proprio e naturale
  - un oggetto complesso può essere decomposto in elementi più semplici col proprio riferimento locale e in seguito assemblato aggragando oggetti elementari
  - un oggetto può essere istanziato più volte

Per assemblare istanziare un oggetto si applicano le trasformazioni affini, che cambiano il riferimento locale

Trasformazioni

Trasformo **P** in **P'**

Cambia il sistema di riferimento

Cambia la posizione del punto

6

Ambiente

- Spazio affine
- coordinate omogenee
- Matrici
- traslazione, scala, rotazione, shear
- prodotto matrice vettore colonna (il punto)

7

Trasformazioni affini

- rappresentate con matrici
- più trasformazioni possono essere combinate moltiplicando le matrici tra loro, creando una sola trasformazione
- una trasformazione si ottiene in generale combinando trasformazioni lineari (rotazioni, scala e shear) seguite da una <u>traslazione</u>

8

Trasformazioni affini (II)

Traslazione – tutti i punti si spostano della stessa quantità (vettore spostamento). Di solito si considera la traslazione del baricentro.

Rotazione – tutti i punti lungo una retta chiamata asse non si spostano. Gli altri punti descrivono circonferenze perpendicolari all'asse.

Scala – variazione della dimensione lungo un asse.

9

Trasformare gli oggetti

- i vertici dell'oggetto vengono trasformati
- denotiamo i vertici (punti) come vettore colonna $\boldsymbol{V}$
- $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{S}$ sono rotazione, traslazione e scala
- il punto trasformato si denota:

$\boldsymbol{V'}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{D}$ traslazione, $\boldsymbol{D}$ è un vettore di traslazione

$\boldsymbol{V'}=\boldsymbol{SV}$ scala, $\boldsymbol{S}$ è una matrice di scala

$\boldsymbol{V'}=\boldsymbol{RV}$ rotazione, $\boldsymbol{R}$ è una matrice di rotazione

10

Richiami di geometria affine

Spazio vettoriale lineare: operazioni di somma tra vettori
Campo scalare e operazioni prodotto vettore x scalare

Spazio affine: addizione vettore - punto; l'operazione di
Sottrazione punto-punto produce un vettore

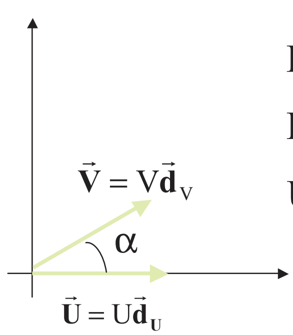
$$P = (x, y, z)$$
$$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$$
$$|v| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$
$$\bar{v} = P - Q \quad \text{vettore come differenza di due punti}$$
$$P = \bar{v} + Q \quad \text{somma scalare - vettore : traslazione del punto di applicazione}$$

11

Prodotto scalare

- $X = \boldsymbol{V.W} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ è uno *scalare*

Significato geometrico:



$$P = \vec{\mathbf{U}} \bullet \vec{\mathbf{V}} = UV(\mathbf{d_U} \bullet d_V)$$
$$P = UV(d_{U_x} d_{V_x} + d_{U_y} d_{V_y} + d_{U_z} d_{V_z}) =$$
$$UV \cos(\alpha)$$

12

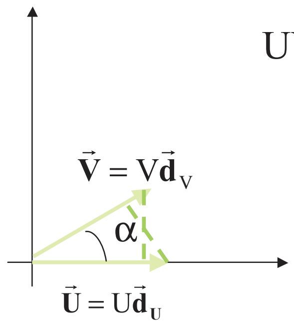
Prodotto scalare, significato geometrico

Proiezione ortogonale di un segmento su un altro.

$$S = \vec{\mathbf{U}} \bullet \vec{\mathbf{V}} = UV(\mathbf{d}_U \bullet d_V)$$

$$S = UV(d_{U_x} d_{V_x} + d_{U_y} d_{V_y} + d_{U_z} d_{V_z}) =$$

$$UV\cos(\alpha)$$



$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{V} \bullet \mathbf{W}}{|\mathbf{V}||\mathbf{W}|}$$

NB $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

Il coseno dell'angolo tra 2 segmenti è il prodotto scalare normalizzato.

13

Proprietà del segno del prodotto scalare

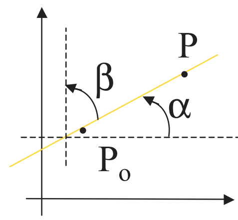
- se ***V.W*** > *0* l'angolo α è: $-90° < \alpha < 90°$
- se ***V.W*** = *0* l'angolo α è: –90° o 90°
- se ***V.W*** < *0* l'angolo α è: $90° < \alpha < 270°$

il prodotto scalare si può quindi usare per valutare l'orientamento di 2 segmenti.

Il prodotto scalare è nullo se i segmenti sono ortogonali (condizione di perpendicolarità)

14

Rette orientate nel piano



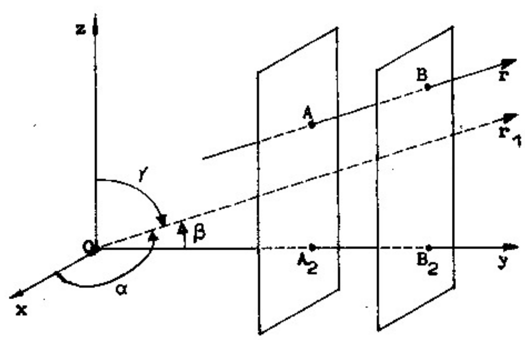
$r = |P-P_o|$

$$P(X,Y) = \begin{matrix} X_o + r\cos(\alpha) \\ Y_o + r\cos(90-\alpha) = Y_o + r\sin(\alpha) \end{matrix}$$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$ relazione di ortogonalità ->
1 parametro

15

Rette orientate



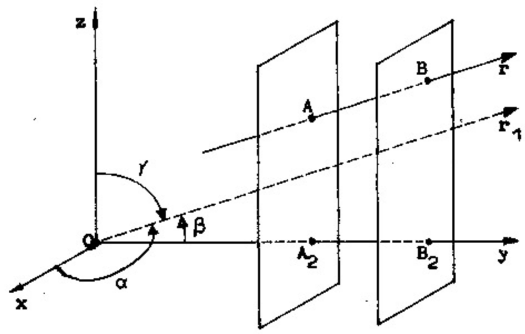
$r = |AB|$

$$B(X,Y,Z) = \begin{matrix} X_o + r\cos(\alpha) \\ Y_o + r\cos(\beta) \\ Z_o + r\cos(\gamma) \end{matrix}$$

$$\cos(\alpha) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{i}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_x / |BA|$$
$$\cos(\beta) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{j}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_y / |BA|$$
$$\cos(\gamma) = \left[(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}) \bullet \vec{\mathbf{k}}\right] / |(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}})| = BA_z / |BA|$$

16

Rette orientate (coseni direttori)



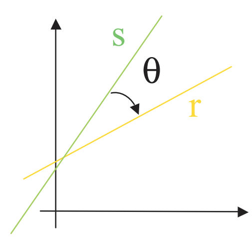
Vale la relazione:

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$
relazione di ortogonalità
-> 2 parametri

$$\cos(\alpha)=\left[(\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{A}})\bullet\vec{\mathbf{i}}\right]/|(\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{A}})|=BA_x/|BA|$$
$$\cos(\beta)=\left[(\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{A}})\bullet\vec{\mathbf{j}}\right]/|(\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{A}})|=BA_y/|BA|$$
$$\cos(\gamma)=\left[(\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{A}})\bullet\vec{\mathbf{k}}\right]/|(\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{A}})|=BA_z/|BA|$$

17

Angolo tra 2 rette



$\cos(\theta) = r \bullet s = r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z$

Condizione di parallelismo: $\cos(\theta) = 1$ ➔ $r_x=s_x$,$r_y=s_y$, $r_z= s_z$

Condizione perpendicolarità: $\cos(\theta) = 0$ ➔ $r_x s_x+r_y s_y+r_z s_z = 0$
(prodotto scalare nullo)

18

Prodotto vettore (cross product)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U_y V_z - U_z V_y) \\ (U_z V_x - U_x V_z) \\ (U_x V_y - U_y V_z) \end{bmatrix}$$

Il risultato è un vettore a sua volta.

$\mathbf{U} = \mathbf{i}$

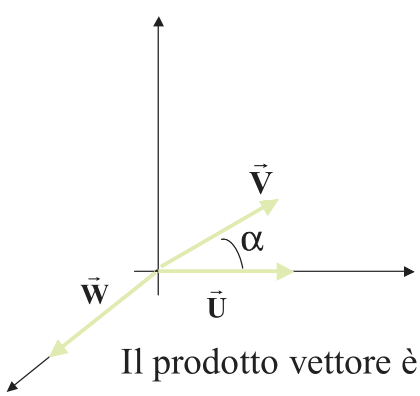
$\mathbf{V} = \mathbf{j}$

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} (00-00) \\ (00-00) \\ (11-00) \end{bmatrix} = [0\ 0\ 1] = \vec{\mathbf{k}}(0,0,1)$$

19

Prodotto vettore (significato geometrico)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}}$$



Vettore normale al piano identificato da **U** e **V**

$$|\mathbf{W}| = |\mathbf{U}||\mathbf{V}|\sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = |(\vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}})| / (|\mathbf{U}||\mathbf{V}|)$$

Il prodotto vettore è nullo se i segmenti sono paralleli

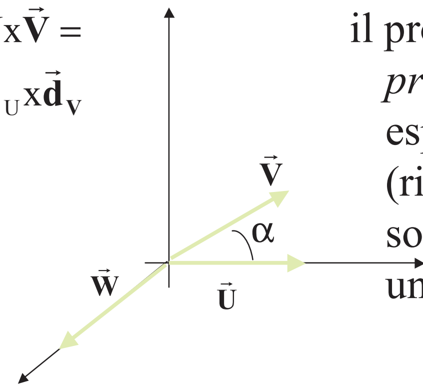
Il senso è coerente con la “regola della mano destra”

20

Prodotto vettore (significato geometrico)

$$\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} \mathrm{x} \vec{\mathbf{V}} = (UV)\vec{\mathbf{d}}_U \mathrm{x} \vec{\mathbf{d}}_V$$

il prodotto vettore (*cross product*) si può esprimere con i versori (ricordiamo che la somma di due vettori è un vettore).



$i = (1,0,0)$

$j = (0,1,0)$

$k = (0,0,1)$

$V = v_1 i + v_2 j + v_3 k$

$U = u_1 i + u_2 j + u_3 k$

$\mathbf{W} = (v_2 u_3 - v_3 u_2)\mathbf{i} + (v_1 u_3 - v_3 u_1)\mathbf{j} + (v_1 u_2 - v_2 u_1)\mathbf{k}$

21

Spazi vettoriali (definizione)

I) Uno spazio vettoriale W è un gruppo additivo rispetto all'addizione sse

E' definita l'addizione: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Proprietà: commutativa, associativa.

Esistenza: dello zero e dell'opposto.

II) E' definita l'operazione di moltiplicazione numerica:

$$z = \lambda x = x\lambda$$

Proprietà: distributiva rispetto alla somma ed associativa.

Esistenza: dell'elemento neutro.

Sotto queste ipotesi, il calcolo vettoriale in uno spazio vettoriale W, qualsiasi, si effettua (per quanto concerne l'addizione e la moltiplicazione numerica), con le stesse regole formali del calcolo vettoriale nel piano o nello spazio 3D Euclideo.

22

Spazi vettoriali (proprietà)

$\alpha(\bar{u}+\bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$ linearità

$\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + ... + \alpha_n\bar{u}_n = \bar{w}$ combinazione lineare

$\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + ... + \alpha_n\bar{u}_n = 0$ se $\alpha_1 = \alpha_2 .. = \alpha_n = 0$

allora $(\bar{u}_1,...,\bar{u}_n)$ sono lineamente indipendenti

n è la dimensione dello spazio, $(\bar{u}_1,...,\bar{u}_n)$ è la base dello spazio

Se vale la relazione: $\mathbf{u_i} \bullet \mathbf{u}_j = 0 \qquad i \neq j$

Le basi sono ortogonali (spazi Euclidei)

23

Matrici

$A = [a_{i,j}]$ $\qquad A^T = [a_{j,i}]$

$\alpha A = [\alpha a_{i,j}]$ $\qquad C = A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$

$C = AB = [c_{i,j}]$ dove $[c_{i,j}] = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$

Prodotto degli elementi di una riga per gli elementi di una colonna. Se A (n x m) ➔ B (m x p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ==> \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}$$

24

Matrici (Proprietà)

La somma è associativa e commutativa (A + B) + C = (A + (B + C).

Il prodotto è associativo rispetto alla somma ma non commutativo (A+B)C = AC + BC. AB $\neq$ BA

$$I = [a_{i,j}] = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{matrice identità}$$

$$AI = A = IA$$

$$\text{vettore come matrice colonna} \quad : \bar{u}^T = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$\text{prodotto vettore matrice} \quad : \bar{v} = \bar{u}^T M$$

Segue le regole del prodotto matriciale

25

Coordinate omogenee

Spazio delle classi di equivalenza: ogni punto in coordinate carteziane 3D corrisponde a infiniti punti nello spazio omogeneo 4D che differiscono solo per un fattore moltiplicativo *w*:

$$V(x, y, z) \text{ corrisponde a :}$$
$$V(wX, wY, wZ, w)$$

Il passaggio tra lo spazio omogeneo e lo spazio 3D:

$$x = X / w$$
$$y = Y / w$$
$$z = Z / w$$

solitamente si sceglie *w=1*

w = 0 identifica il punto all'∞ sulla retta per l'origine, passante per V.

I coseni direttori saranno x/|v|, y/|v|, z/|v|.

26

Traslazione, Rotazione e Scala

Vengono espresse come trasformazioni nello spazio di coordinate omogenee 4D come prodotto tra matrici.

Traslazione

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x + 0 + 0 + T_x)$$
$$y' = (0 + y + 0 + T_y)$$
$$z' = (0 + 0 + z + T_z)$$
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

coord. omogenee

$$x^t = x'/w' = (x + T_x)/1 = x + T_x$$
$$y^t = y'/w' = (y + T_y)/1 = y + T_y$$
$$z^t = z'/w' = (z + T_z)/1 = z + T_z$$

coord. cartesiane

27

Scala

$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V' = SV = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = (x.S_x + 0 + 0 + 0)$$
$$y' = (y.S_y + 0 + 0 + 0)$$
$$z' = (z.S_z + 0 + 0 + 0)$$
$$w' = (0 + 0 + 0 + 1)$$

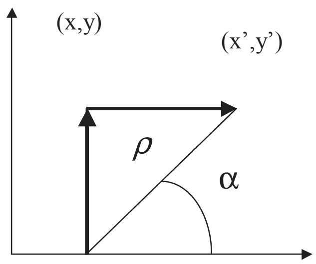
coord. omogenee

$$x^s = x'/w' = (x.S_x)/1$$
$$y^s = y'/w' = (y.S_y)/1$$
$$z^s = z'/w' = (z.S_z)/1$$

coord. cartesiane

28

Rotazione (coordinate nel piano)

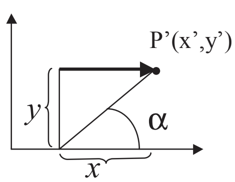


$x=\rho\cos\alpha$

$y=\rho\cos(90-\alpha)=\rho\sin\alpha$

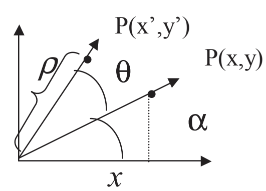
29

La rotazione attorno a *z*



$x=\rho\cos\alpha$

$y=\rho\sin\alpha$



$$x'=\rho\cos(\alpha+\theta)=\boxed{\rho\cos\alpha}\cos\theta+\boxed{\rho\sin\alpha}\sin\theta$$

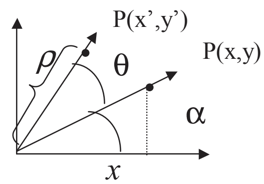
$$=x\cos\theta+y\sin\theta$$

$$y'=\rho\sin(\alpha+\theta)=-\rho\cos\alpha\sin\theta+\rho\sin\alpha\cos\theta$$
$$=-x\sin\theta+y\cos\theta$$

30

La rotazione attorno a *z*

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Matrice di rotazione

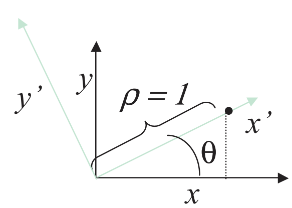
$$\sum_{i=1}^{3} m^2_{ii} = 1 \qquad \det(M) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_{ij} m_{jk} = 0 \quad i \neq k$$

Matrice ortonormale

I sistemi di riferimento

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$

$\rho = 1$

Matrice di rotazione

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x' \bullet x & x' \bullet y & 0 \\ y' \bullet x & y' \bullet y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sulla colonna i: proiezione dell'asse i sugli assi i'j'k'

Sulla riga j: proiezione dell'asse i,j,k sull'asse j'

Rotazione attorno a z (coordinate omogenee)

$$V' = R_z V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= (x.\cos\theta + y.\sin\theta + 0 + 0) \\ y' &= (-x.\sin\theta + y.\cos\theta + 0 + 0) \\ z' &= (0 + 0 + z + 0) \\ w' &= (0 + 0 + 0 + 1) \end{aligned}$$

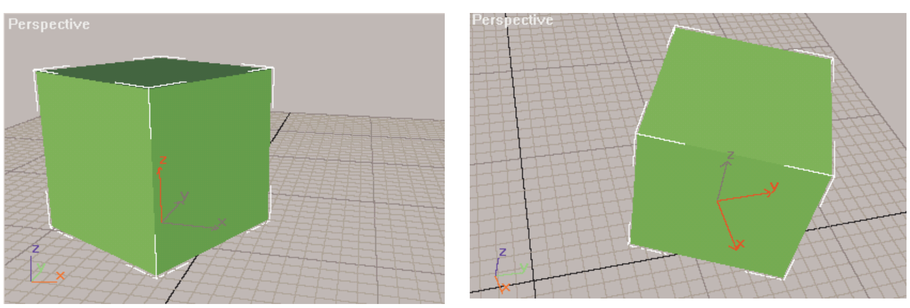
coord. omogenee

$$\begin{aligned} x^{R_z} &= x'/w' = (x.\cos\theta + y.\sin\theta)/1 \\ y^{R_z} &= y'/w' = (-x.\sin\theta + y.\cos\theta)/1 \\ z^{R_z} &= z'/w' = (z.1)/1 \end{aligned}$$

coord. cartesiane

33

Orientamento



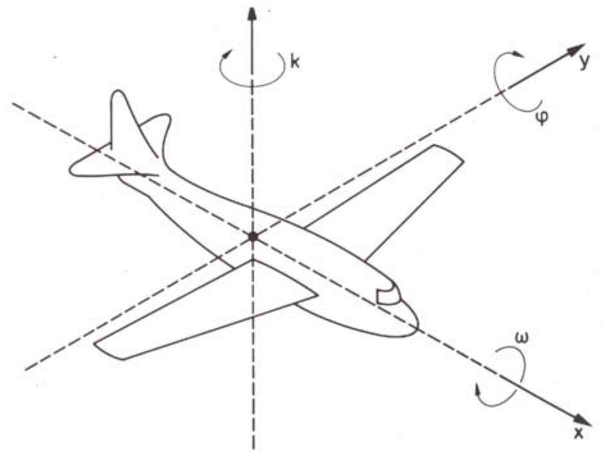
Tre parametri: tre rotazioni.

34

Angoli di orientamento nello spazio 3D

Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.

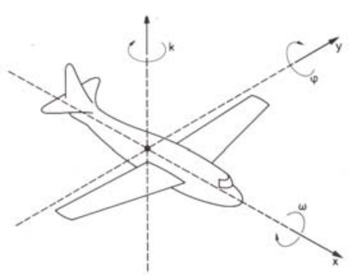
Sono 3 rotazioni sequenziali, non commutative.



5

Rotazioni

Modo generale: roll, pitch, e yaw.
(ω, ϕ, k): rollio, beccheggio e deriva.



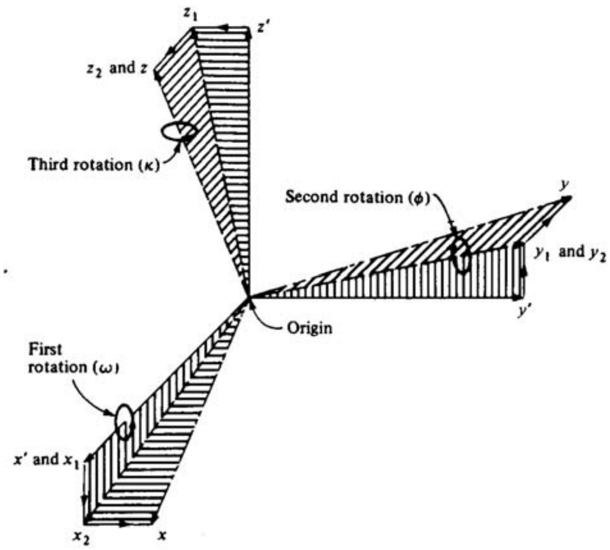
$$R_{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$R_{\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_{\kappa} = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

36

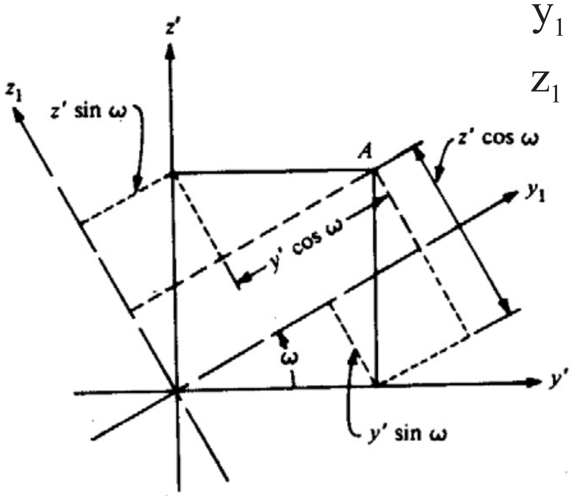
Rotazioni sequenziali



Ciascuna rotazione avviene su uno dei piani coordinati. 37

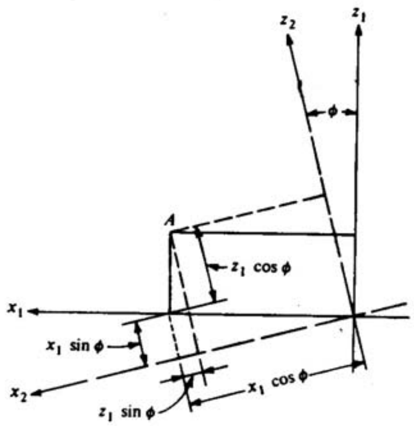
I) Rotazione attorno all'asse x (roll)

$$x_1 = x$$
$$y_1 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_1 = -y'\sin\omega + z'\cos\omega$$



38

II) Rotazione attorno all’asse y (pitch)

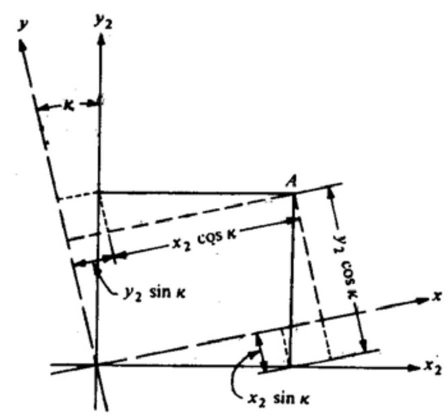


$$x_2 = x_1 \cos\phi + z_1 \sin\phi$$
$$y_2 = y_1$$
$$z_2 = -x_1 \sin\phi + z_1 \cos\phi$$

$$x_2 = x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi$$
$$y_2 = y'\cos\omega + z'\sin\omega$$
$$z_2 = -x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

39

III) Rotazione attorno all’asse z (yaw)

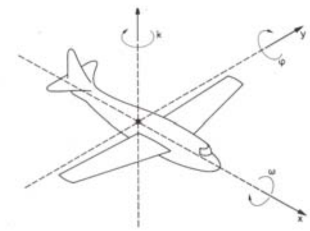


$$x_3 = x_2 \cos k + y_2 \sin k$$
$$y_3 = -x_2 \sin k + z_2 \cos k$$
$$z_3 = z_2$$

$$x_3 = [x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\cos k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\sin k$$
$$y_3 = -[x'\cos\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\sin\phi]\sin k + [y'\cos\omega + z'\sin\omega]\cos k$$
$$z_3 = -x'\sin\phi + (-y'\sin\omega + z'\cos\omega)\cos\phi$$

40

Dalle rotazioni alla matrice di rotazione



Come è legata R alle tre rotazioni indipendenti?

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos(k) & -\cos(\varphi)sin(k) & -sin(k) \\ \cos(w)sin(k) - sin(w)sin(\varphi)\cos(k) & \cos(w)\cos(k) + sin(w)sin(\varphi)sin(k) & -sin(w)\cos(\varphi) \\ sin(w)sin(k) + \cos(w)sin(\varphi)\cos(k) & sin(w)\cos(k) - \cos(w)sin(\varphi)sin(k) & \cos(w)\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Si ricava eseguendo le rotazioni sequenziali. Ogni rotazione tiene fermo un asse e agisce sul piano perpendicolare.
Rotazioni "*semplici*" utilizzate dai programmi di animazione, gestione matriciale *efficiente* del calcolo.

41

Le matrici affini

P' = RP + T => P' = AP

$$\begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Vettore di traslazione

42

Composizione di trasformazioni

- Si possono applicare trasformazioni in successione, moltiplicando in ordine opportuno le matrici.

$$V'' = A_2 A_1 V = A_2(A_1 V) = (A_2 A_1) V'$$

  – la trasf. A_1 viene applicata per prima!
- ricordiamo che il prodotto di rotazioni <u>non è</u> <u>*commutativo*</u>: $R_2 R_1 \neq R_1 R_2$

43

Trasformazioni inverse

- Denotiamo le inverse come le matrici affini: T^{-1}, S^{-1}, R^{-1}.
- La traslazione inversa si ottiene *negando* i coefficienti di traslazione.
- La scala inversa si ottiene prendendo il *reciproco* dei coefficienti.
- La rotazione inversa si ottiene *negando* l'angolo di rotazione. Matrice trasposta.

44

Le matrici affini
(trasformazione inversa)

P’ = **RP** + **T** => **P’** = **AP**

$\mathbf{R^T R P} = \mathbf{R^T P'} - \mathbf{R^T T} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{A^{-1} P'}$

Proiezione di **T** sugli assi di arrivo: $\mathbf{r_i} \bullet \mathbf{T}$

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{11}T_x + r_{21}T_y + r_{31}T_z \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{12}T_x + r_{22}T_y + r_{32}T_z \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{13}T_x + r_{23}T_y + r_{33}T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_P \\ Y'_P \\ Z'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

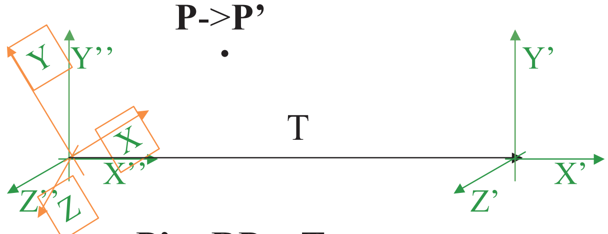
Matrice di rotazione (inversa)

Vettore di traslazione (inverso)

45

Trasformazioni dirette
(significato geometrico)

P->P’



P’ = **RP** + **T**

1) **P’’** = **RP**

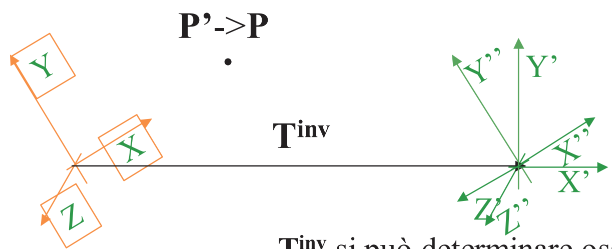
2) **P** = **P’’** + **T**

In questo particolare caso:

T = [T_x,0]

46

Trasformazioni inverse (significato geometrico)



$P = R^T P' - R^T T$

1) $P'' = R^T P'$

2) $P = P'' - T^{inv}$

$\mathbf{T^{inv}}$ si può determinare osservando che il punto che viene traslato è **P''**. Questo è espresso nel sistema di riferimento con gli assi orientati come XYZ: $\mathbf{T^{inv}} = \mathbf{-RT}$. Le 2 componenti della traslazione sono ottenute proiettando **T**, nel sistema X'Y'Z', in $\mathbf{T^{inv}}$, nel sistema XYZ.

47

Verso trasformazioni più complesse

48

Rotazione attorno a un punto e parallela a un asse

- traslare l'oggetto nell'origine, i coefficienti della traslazione ***T*** sono riferiti al punto ***p***
- ruotare attorno all'origine di un angolo θ
- traslare inversamente nel punto ***p***

$$\boldsymbol{M=T^{-1}RT}$$

49

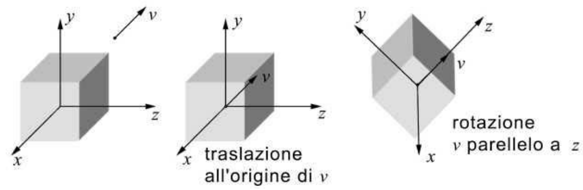
- combinando le tre trasformazioni in un'unica matrice:

$$T^{-1}RT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & (-p_x\cos\theta + p_y\sin\theta + p_x) \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & (-p_x\sin\theta - p_y\cos\theta + p_y) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

50

Rotazione attorno a un punto e a un asse generico:



In generale una trasformazione composta è organizzata:

$$\text{rotazione} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} rot_{1,1} & rot_{1,2} & rot_{1,3} \\ rot_{2,1} & rot_{2,2} & rot_{2,3} \\ rot_{3,1} & rot_{3,2} & rot_{3,3} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 0 & \quad 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{traslazione}$$

Cambiamento di riferimento

- Le trasf. si possono considerare applicate agli oggetti (punti in un s.d.r.) o come cambiamento di riferimento
- In questo caso si esprimono i punti in un nuovo s.d.r.; es. traslazione:

$$T_{21} = (T_{12})^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -T_x \\ 0 & 1 & 0 & -T_y \\ 0 & 0 & 1 & -T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parametrizzare le rotazioni

53

Problema 1: “gimbal lock”

- blocco del giroscopio
- esprimiamo le rotazioni con gli angoli di Eulero, tre angoli di rotazione attorno agli assi coordinati (si pensi a un velivolo, *yaw, pitch, roll*)
- implementiamo gli angoli di Eulero con le matrici appena esaminate

54

- ricordiamo che le rotazioni <u>non</u> sono commutative!
- eseguiamo una rotazione di yaw di 90°
- eseguiamo una rotazione di pitch o roll di 90° cosa succede?
- abbiamo applicato la sequenza di rotazioni R(0,0,0), ... R(πt,0,0), ..., R(π,0,0) con 0<=t<=1
- la sequenza corretta sarebbe R(0,0,0), ... R(0, πt, πt), ..., R(0, π, π)
- ma come fare a saperlo?

(qui l'esempio)

55

Problema 2: Interpolare rotazioni

- nella animazione si richiede di modificare la posizione di un oggetto o della camera con traslazioni e rotazioni
- interpolare traslazioni non pone problemi
- da un fotogramma al successivo la rotazione deve essere interpolata, è utile quindi poter esprimere la rotazione in forma parametrica

56

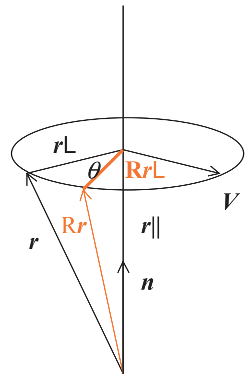
- se incrementiamo di una piccola quantita' un angolo più volte nascono problemi di arrotondamento
- se abbiamo rotazione attorno a un solo asse nascono irregolarità e movimenti a scatto
- se abbiamo più rotazioni, dopo un po' di tempo la matrice non è più ortogonale e la scena si deforma
- si può risolvere il problema "rinormalizzando" la matrice a ogni passo
- comunque è una soluzione costosa

57

Specificare le rotazioni

- Una matrice di rotazione generica dipende da 9 parametri
- una rotazione generica richiede un'asse di rotazione $\boldsymbol{n}$ e un angolo θ: solo 4 parametri (3 per il vettore, 1 per l'angolo)
  - (c'è un teorema di Eulero che garantisce ciò)

58



il vettore ***r*** può essere scomposto in una componente parallela a ***n*** e in una ortogonale:

$\boldsymbol{r}\| = (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{n}$

$\boldsymbol{r}\perp = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{n}$

la componente || resta invariata nella rotazione, varia solo la componente $\perp$ (rossa). ***V*** sia ortogonale a $\boldsymbol{r}\perp$:

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}\perp = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}$ da cui il vettore ruotato (rosso) espresso in funzione di ***V***:

$$R\mathbf{r}\perp = (\cos\theta)\mathbf{r}\perp + (\sin\theta)\mathbf{V}$$

da cui:

$$\begin{aligned} R\mathbf{r} &= R\mathbf{r}\| + R\mathbf{r}\perp \\ &= R\mathbf{r}\| + (\cos\theta)\mathbf{r}\perp + (\sin\theta)\mathbf{V} \\ &= \mathbf{n.r} \times \mathbf{n} + (\cos\theta)(\mathbf{r} - \mathbf{n.r} \times \mathbf{n}) + (\sin\theta)\mathbf{n} \times \mathbf{r} \\ &= (\cos\theta)\mathbf{r} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}(\mathbf{n.r}) + (\sin\theta)\mathbf{n} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

59

I quaternioni

60

Numeri complessi (richiami)

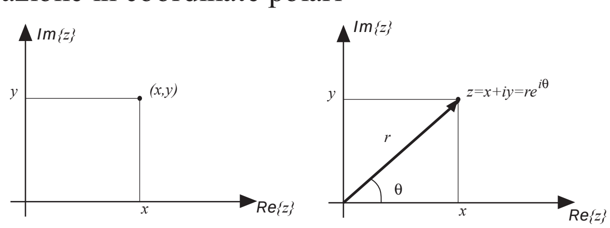
I numeri complessi sono una estensione dei numeri reali e sono indispensabili per risolvere equazioni del tipo: $z=(-1)^2$. Adottando il simbolo i per denotare la radice quadrata dell'unita negativa, la soluzione a questa equazione diventa $z = \pm i$.
Un numero complesso z è una coppia ordinata di numeri reali. Si può quindi rappresentare un numero complesso con la notazione

$$z=(x,y)$$

dove x rappresenta la parte reale, denotata anche con $Re\{z\}$, mentre y rappresenta la parte immaginaria, denotata anche con $Im\{z\}$.

61

Un numero complesso si può anche rappresentare nella forma $z=x+iy$ (oppure $z=x+jy$ nella teoria dei segnali). Questa forma di rappresentazione dei numeri complessi viene anche chiamata "forma Cartesiana". I numeri complessi possono anche essere pensati come punti del "piano complesso", perciò i numeri complessi possono essere considerati come un punto vista dal quale studiare la geometria analitica del piano. Si usa anche la rappresentazione in coordinate polari



62

Sono definite numerose operazioni tra numeri complessi, in particolare:

somma : $z1 + z2 = (x1 + iy1) + (x2 + iy2) = (x1 + x2) + i(y1 + y2)$

sottrazione: $z1 - z2 = (x1 + iy1) - (x2 + iy2) = (x1 - x2) + i(y1 - y2)$

complesso coniugato: $z^* = (x + iy)^* = (x - iy)$

Le operazioni di prodotto e divisione sono più semplici nella forma polare, ricordando le proprietà degli esponenziali:

prodotto: $z1 \,.\, z2 = r1\, e^{i\theta 1} \,.\, r2\, e^{i\theta 2} = r1 \,.\, r2\, e^{i(\theta 1+\theta 2)}$

divisione: $z1 / z2 = r1\, e^{i\theta 1} / r2\, e^{i\theta 2} = r1 / r2\, e^{i(\theta 1-\theta 2)}$

63

Per convertire un numero complesso dalla forma cartesiana a quella polare si ricorre a proprietà trigonometriche e al teorema di Pitagora; infatti ricordiamo che:

$$x = r \cos\theta\,; \quad y = r \sin\theta$$

ed, equivalentemente, le componenti r e θ di un numero complesso in coordinate polari si convertono in forma cartesiana con le due equazioni:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

64

La rappresentazione in forma polare più adeguata è basata sulla formula di Eulero che permette di rappresentare un numero complesso come esponenziale in base *e* in forma trigonometrica:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Le formule di Eulero inverse permettono di ottenere seno e coseno dalla rappresentazione esponenziale di un numero complesso:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

La coppia di valori (*cos θ, sin θ)* rappresenta un qualunque punto su un cerchio di raggio unitario centrato nell'origine, al variare di θ; perciò per individuare qualsiasi punto nel piano è sufficiente moltiplicare la forma esponenziale per il modulo *r*:

$$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

65

I quaternioni

- la rotazione di un vettore ***r*** di un angolo si può esprimere con un operatore chiamato quaternione, caratterizzato da 4 numeri reali
- abbiamo 4 gradi di libertà invece dei 9 elementi della matrice
- useremo quaternioni *unitari*
- i quaternioni possono essere considerati come una generalizzazione dei numeri complessi, con uno scalare *s* come parte reale e un vettore ***v*** come parte immaginaria

66

- denotiamo un quaternione con:

$$q = s + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

dove $\boldsymbol{i,j,k}$ sono i quaternioni unitari ed equivalgono ai vettori unitari degli assi in un sistema vettoriale e hanno le proprietà:

$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$; $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k}$

- da queste proprietà ricaviamo le operazioni somma e moltiplicazione

67

Operazioni sui quaternioni

- somma:

$q+q'=(s+s',\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v'})$

- moltiplicazione:

$qq'=(ss'-\boldsymbol{vv'}, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v'} + s\boldsymbol{v'} + s'\boldsymbol{v})$

- coniugato:

$q=(s,\boldsymbol{v})$ $q^*=(s,-\boldsymbol{v})$

- il prodotto di un quaternione con il suo coniugato dà il modulo del quaternione:

$qq^*=(ss-|\boldsymbol{v}^2|)=q^2$

68

- quaternioni della forma: $q=(s,(0,0,0))$ sono associati ai numeri reali
- quaternioni della forma: $q=(s,(a,0,0))$ sono associati ai numeri complessi
- negazione:

dato $q=(s,\mathbf{v})$ si ha $-q=(-s,-\mathbf{v})$

- identità moltiplicativa:

QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

69

- inverso della moltiplicazione:

QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

basta verificare che:

QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

da cui $qq^{-1}=q^{-1}q=1$

- quoziente: QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

70

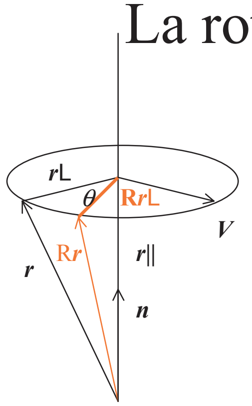
- Se $|q|=1$ il quaternione è detto *unitario*
- L'insieme dei quaternioni unitari forma una sfera in uno spazio a 4 dimensioni
- Si può dimostrare che se $q=(s,\mathbf{v})$ allora esiste un vettore $\mathbf{v'}$ e un numero $-\pi <= \theta <= \pi$ tale che: $q=(\cos\theta, \mathbf{v'}\sin\theta)$
- Se q è unitario allora $q=(\cos\theta, \sin\theta\,\mathbf{n})$ con $\mathbf{n}$ unitario
- i quaternioni non sono commutativi rispetto al prodotto, es:

QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

(ricordiamo: $qq'=(ss'-\mathbf{vv'}, \mathbf{v}\times\mathbf{v'}+s\mathbf{v'}+s'\mathbf{v})$)

La rotazione con quaternioni



- $\mathbf{r}$ è definito dal quaternione $p=(0,\mathbf{r})$
- definiamo l'operatore $R_q=q(.)q^{-1}$ con q quaternione unitario $(s,\mathbf{v})$
- applicato a p l'operatore dà: qpq^{-1}
- in forma esplicita:
- $R_q(p)=(0,(s^2-\mathbf{v}.\mathbf{v})\mathbf{r}+2\mathbf{v}(\mathbf{v}.\mathbf{r})+2s(\mathbf{v}\times\mathbf{r}))$
- ricordando che: se q è unitario allora $q=(\cos\theta, \sin\theta\,\mathbf{n})$ con $\mathbf{n}$ unitario e sostituendo si ha:

$$R_q(p)=(0,(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathbf{r}+2\sin^2\theta\,\mathbf{n}(\mathbf{n}.\mathbf{r})+2\cos\theta\sin\theta(\mathbf{n}\times\mathbf{r}))=$$

$$(0, \mathbf{r}\cos 2\theta+(1-\cos 2\theta\,\mathbf{n}(\mathbf{n}.\mathbf{r})+\sin 2\theta(\mathbf{n}\times\mathbf{r}))$$

- confrontiamo la:

*(0, **r**cos2θ +(1- cos2θ **n**(**n.r**)+sin2θ(**n×r**))*

- con l'equazione ricavata prima:

$$(\cos\theta)\mathbf{r} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}(\mathbf{n.r}) + (\sin\theta)\mathbf{n}\times\mathbf{r}$$

- a meno del coefficiente 2 sono identiche
- la rotazione di un vettore ***r*** di *(θ,**n**)* si può quindi attuare:
  - passando allo spazio dei quaternioni
  - rappresentando la rotazione con un quaternione unitario *q=(cos θ/2, sin θ/2 **n**)*
  - applicando l'operatore $q(.)q^{-1}$ al quaternione *(0,**r**)*
- la rotazione si parametrizza quindi con i 4 parametri: $\cos\theta/2,\ \sin\theta/2\,\mathbf{n}_x,\ \sin\theta/2\,\mathbf{n}_y,\ \sin\theta/2\,\mathbf{n}_z$

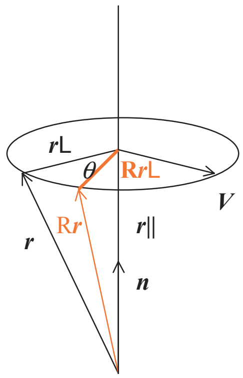
73

continua ...

un po' di link

- http://www.3dgamedev.com/articles/eulers_are_evil.htm
- http://www.gamedev.net/reference/articles/article1095.asp
- keyword per ricerca in rete: quaternion, euler angle

74



il vettore ***r*** può essere scomposto in una componente parallela a ***n*** e in una ortogonale:

r||=(***n.r***) X***n***

rL=***r*** **-** (***n.r***) X***n***

la componente || resta invariata nella rotazione, varia solo la componente L (rossa). ***V*** sia ortogonale a ***r***L:

V=***n***X ***r***L = ***n***X***r*** da cui il vettore ruotato (rosso) espresso in funzione di ***V***:

$$R\mathbf{r}\mathrm{L} = (\cos\theta)\mathbf{r}\mathrm{L} + (\sin\theta)\mathbf{V}$$

da cui:

$$\begin{aligned} R\mathbf{r} &= R\mathbf{r}\| + R\mathbf{r}\mathrm{L} \\ &= R\mathbf{r}\| + (\cos\theta)\mathbf{r}\mathrm{L} + (\sin\theta)\mathbf{V} \\ &= \mathbf{n.r}\times\mathbf{n} + (\cos\theta)(\mathbf{r} - \mathbf{n.r}\times\mathbf{n}) + (\sin\theta)\mathbf{n}\times\mathbf{r} \\ &= (\cos\theta)\mathbf{r} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}(\mathbf{n.r}) + (\sin\theta)\mathbf{n}\times\mathbf{r} \end{aligned}$$

75

- denotiamo un quaternione con:

$$q = s + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

dove ***i,j,k*** sono i quaternioni unitari ed equivalgono ai vettori unitari degli assi in un sistema vettoriale e hanno le proprietà:

$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$; $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k}$

- da queste proprietà ricaviamo le operazioni somma e moltiplicazione

76

Operazioni sui quaternioni

- somma:

$q+q'=(s+s',\mathbf{v}+\mathbf{v}')$

- moltiplicazione:

$qq'=(ss'-\mathbf{v}\mathbf{v}',\ \mathbf{v}\times\mathbf{v}'+s\mathbf{v}'+s'\mathbf{v})$

- coniugato:

$q=(s,\mathbf{v})\quad q^*=(s,-\mathbf{v})$

- il prodotto di un quaternione con il suo coniugato dà il modulo del quaternione:

$qq^*=(ss-|\mathbf{v}^2|)=q^2$

77

- quaternioni della forma: $q=(s,(0,0,0))$ sono associati ai numeri reali
- quaternioni della forma: $q=(s,(a,0,0))$ sono associati ai numeri complessi
- negazione:

dato $q=(s,\mathbf{v})$ si ha $-q=(-s,-\mathbf{v})$

- identità moltiplicativa:

QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

78

- inverso della moltiplicazione:

QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

basta verificare che:

QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

da cui $qq^{-1}=q^{-1}q=1$

- quoziente: QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

79

- Se $|q|=1$ il quaternione è detto *unitario*
- L'insieme dei quaternioni unitari forma una sfera in uno spazio a 4 dimensioni
- Si può dimostrare che se $q=(s,\mathbf{v})$ allora esiste un vettore $\mathbf{v'}$ e un numero $-\pi<=\theta<=\pi$ tale che: $q=(\cos\theta, \mathbf{v'}\sin\theta)$
- Se q è unitario allora $q=(\cos\theta, \sin\theta\, \mathbf{n})$ con $\mathbf{n}$ unitario
- i quaternioni non sono commutativi rispetto al prodotto, es:

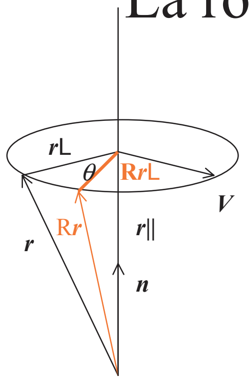
QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

QuickTime™ and a TIFF (LZW) decompressor are needed to see this picture.

(ricordiamo: $qq'=(ss'-\mathbf{v}\mathbf{v'}, \mathbf{v}\times\mathbf{v'}+s\mathbf{v'}+s'\mathbf{v})$)

80

La rotazione con quaternioni



- $\boldsymbol{r}$ è definito dal quaternione $p=(0,\mathbf{r})$
- definiamo l'operatore $R_q=q(.)q^{-1}$ con q quaternione unitario $(s,\mathbf{v})$
- applicato a p l'operatore dà: qpq^{-1}
- in forma esplicita:
- $R_q(p)=(0,(s^2-\mathbf{v}.\mathbf{v})\mathbf{r}+2\mathbf{v}(\mathbf{v}.\mathbf{r})+2s(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$
- ricordando che: se q è unitario allora $q=(\cos\theta, \sin\theta\,\mathbf{n})$ con $\boldsymbol{n}$ unitario e sostituendo si ha:

$R_q(p)=(0,(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathbf{r}+2\sin^2\theta\,\mathbf{n}(\mathbf{n}.\mathbf{r})+2\cos\theta\sin\theta(\mathbf{n}\times\mathbf{r}))=$

$(0, \mathbf{r}\cos2\theta+(1-\cos2\theta\,\mathbf{n}(\mathbf{n}.\mathbf{r})+\sin2\theta(\mathbf{n}\times\mathbf{r}))$

81

- confrontiamo la:

$(0, \mathbf{r}\cos2\theta+(1-\cos2\theta\,\mathbf{n}(\mathbf{n}.\mathbf{r})+\sin2\theta(\mathbf{n}\times\mathbf{r}))$

- con l'equazione ricavata prima:

$$(\cos\theta)\mathbf{r}+(1-\cos\theta)\mathbf{n}(\mathbf{n}.\mathbf{r})+(\sin\theta)\mathbf{n}\times\mathbf{r}$$

- a meno del coefficiente 2 sono identiche
- la rotazione di un vettore $\boldsymbol{r}$ di $(\theta,\mathbf{n})$ si può quindi attuare:
  - passando allo spazio dei quaternioni
  - rappresentando la rotazione con un quaternione unitario $q=(\cos\theta/2, \sin\theta/2\,\mathbf{n})$
  - applicando l'operatore $q(.)q^{-1}$ al quaternione $(0,\mathbf{r})$
- la rotazione si parametrizza quindi con i 4 parametri: $\cos\theta/2, \sin\theta/2\,\mathbf{n}_x, \sin\theta/2\,\mathbf{n}_y, \sin\theta/2\,\mathbf{n}_z$

82

ancora un esempio

- ruotiamo un oggetto di 180° attorno all'asse *x* con la sequenza di rotazioni R(0,0,0), ... R(πt,0,0), ..., R(π,0,0) con 0<=t<=1
- la seconda sequenza ruota attorno *y, z* : R(0,0,0), ... R(0, πt, πt), ..., R(0, π, π)
- la posizione finale e' identica, ma l'oggetto "twista" nella seconda
- occorre controllare i 3 angoli di Eulero per governare la sequenza desiderata
- da qui l'uso dei quaternioni

83

con i quaternioni

- la rotazione ottenuta con la sequenza R(0,0,0), ... R(πt,0,0), ..., R(π,0,0) è rappresentata dal quaternione (*cos(π/2), sin(π/2)(1,0,0))=(0,(1,0,0))*
- la rotazione ottenuta con la sequenza R(0,0,0), ... R(0, πt, πt), ..., R(0, π, π) è rappresentata dal prodotto dei due quaternioni *(0,(0,1,0))(0,(0,0,1)=(0,(1,0,0)*
- **Il risultato è uguale**

84

Interpolare

- una sequenza di rotazioni puo' ora essere attuata da una sequenza di quaternioni
- la sequenza di matrici di rotazione espresse con angoli di Eulero viene trasformata in una sequenza di quaternioni che danno origine a una nuova sequenza di matricidi rotazione
- come?

85

Entrare e uscire dallo spazio dei quaternioni

- data una matrice generale di rotazione determinare il quaternione corrispondente
- dato un quaternione determinare la corrispondente matrice di rotazione

86

- per ruotare un vettore ***p*** con il quaternione *q* usiamo l'operatore: $q(0,\mathbf{p})q^{-1}$
- dove $q=(\cos(\theta/2),\sin(\theta/2)\mathbf{n})=(s,(x,y,z))$
- si può dimostrare che questo corrisponde ad applicare al vettore la matrice di rotazione:

$$M=\begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2xy-2sz & 2sy+2xz & 0 \\ 2xy+2sz & 1-2(x^2+z^2) & -2sx+2yz & 0 \\ -2sy+2xz & 2sx+2yz & 1-2(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

87

- la trasformazione inversa dalla matrice al quaternione consiste nel prendere una generica matrice:

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & M_{0,3} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,0} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{pmatrix}$$

- in cui $M_{3,3}=1;$ $M_{0,3}=M_{1,3}=M_{2,3}=M_{3,0}=M_{3,1}=M_{3,2}=0$
- altri vincoli sulla matrice sono:
  - la somma degli elementi diagonali è: $4\text{-}4(x^2+y^2+z^2)$
  - il quaternione deve essere unitario, quindi: $s^2+x^2+y^2+z^2=1$ da cui: $4\text{-}4(x^2+y^2+z^2)=4\text{-}4(1\text{-}s^2)=4s^2$

88

- da questa equazione si ricava:

$$s = \pm\frac{1}{2}\sqrt{M_{0,0} + M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3}}$$

e inoltre :

$$x = \frac{M_{2,1} - M_{1,2}}{4s}$$

$$y = \frac{M_{0,2} - M_{2,0}}{4s}$$

$$z = \frac{M_{1,0} - M_{0,1}}{4s}$$

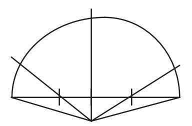
89

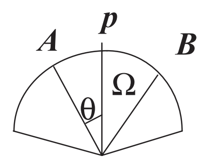
Interpolazione lineare sferica SLERP

- per interpolare tra due quaternioni unitari determinando i quaternioni intermedi che identificano le matrici di rotazione ricordaimo che lo spazio dei quaternioni unitari forma una ipersefra nello spzio 4d, perciò tutti i quaternioni interpolati giacciono sulla sfera stessa.

90

- una interpolazione lineare ingenua produce angoli diseguali e quindi una variazione di velocità, da qui la nozione di interpolazione *sferica*:





- interpoliamo lungo una linea *geodesica* che ha gli esteremi nei punti chiave
- in due dimensioni (per semplicità) i punti ***A,B*** sono separati dall'angolo Ω, e ***p*** forma con ***A*** un angolo θ. Deriviamo ***p*** con interpolazione sferica con l'equazione parametrica: $\boldsymbol{p}=\alpha \boldsymbol{A}+\beta \boldsymbol{B}$;

91

- $\boldsymbol{p}=\alpha \boldsymbol{A}+\beta \boldsymbol{B}$ poiché:
- $|\boldsymbol{p}|=1$; $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}=cos(\Omega)$
- $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{p}=cos(\theta)$
- ricaviamo:
- $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}sin(\Omega-\theta)/sin(\Omega)+\boldsymbol{B}sin(\theta)/sin(\Omega)$

92

- generalizzando in 4d l'interpolazione tra due quaternioni unitari q_1 e q_2 che formano l'angolo: $q_1.q_2 = cos(\Omega)$ si ha, considerando θ come parametro 0<=u<=1:

$$slerp(q_1,q_2,u) = q_1 \frac{\sin(1-u)\Omega}{\sin(\Omega)} + q_2 \frac{\sin(\Omega u)}{\sin(\Omega)}$$

93

- esistono due possibili archi geodesici che vanno da q_1 a q_2 uno segue il percorso più breve, l'altro il più lungo, e questo equivale a interpolare lungo l'angolo Ω o l'angolo $2\pi-\Omega$. Ciò consegue dal fatto che gli operatori $q(.)q^{-1}$ e $(-q)(.)(-q)^{-1}$ producono il medesimo risultato
- per decidere quale percorso seguire occorre valutare la grandezza della distanza tra i due quaternioni e tra il primo e il secondo negato:
- $(p-q).(p-q)$ verso $(p+q).(p+q)$ e scegliere il minore, sostituendo, nel caso, q con $-q$.

94

- L’interpolazione tra più di due posizioni chiave produce geodesiche che possono essere discontinue nella derivata prima, quindi dà luogo a movimento con scatti.
- per ovviare si valuta la velocità angolare e si suddividono gli intervalli per il parametro in modo adeguato (più fitti quando la velocità è maggiore).

95