La seconda forma canonica
Circuiti notevoli

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
borghese@dsi.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti: Sezione B3.

Sommario

La seconda forma canonica.

Circuiti combinatori notevoli.

Circuiti combinatori

- Circuiti logici digitali in cui le operazioni (logiche) dipendono solo da una combinazione degli input.
- Circuiti senza memoria. Ogni volta che si inseriscono in ingresso gli stessi valuri, si ottengono le stesse uscite. Il risultato non dipende dallo stato del circuito.
- I circuiti combinatori descrivono delle funzioni Booleane. Queste funzioni si ottengono combinando tra loro (in parallelo o in cascata) gli operatori logici: **NOT, AND, OR**.
- Il loro funzionamento può essere descritto come **tabella della verità**.
- Come nelle funzioni algebriche, il risultato è aggiornato immediatamente dopo il cambiamento dell'input (si suppone il tempo di commutazione trascurabile, tempo di attesa prima di guardare l'output sufficientemente ampio per permettere a tutti i circuiti la commutazione).

Funzione come espressione logica o come tabella delle verità

$F = A\,B + B\,\overline{C}$

A B C	A and B	B and $\overline{C}$	F
0 0 0	0	0	0
0 0 1	0	0	0
0 1 0	0	1	1
0 1 1	0	0	0
1 0 0	0	0	0
1 0 1	0	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	1

Razionale della prima forma canonica

F = (A AND B) OR
(B AND NOT(C))

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

F = 1

iif

A = 0 B = 1 C = 0
OR
A = 1 B = 1 C = 0
OR
A = 1 B = 1 C = 1

Forme canoniche

- Esiste un metodo per ricavare automaticamente un circuito che implementi una tabella di verità?
- Esistono 2 forme canoniche (equivalenti) che garantiscono di poter realizzare una qualunque tabella di verità con solo due livelli di porte OR, AND e NOT:

1) Somme di Prodotti (SOP)

$$F = \sum_{i=1}^{Q} m_i$$

$F = \overline{A}\ B\ \overline{C} + A\ B\ \overline{C} + A\ B\ C$

2) Prodotti di Somme (POS)

Razionale della seconda forma canonica

$$F = \mathrm{NOT}\,(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,C + \bar{A}\,B\,C + A\,\bar{B}\,\bar{C} + A\,\bar{B}\,C)$$

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

F = 0

iif

(A = 0 B = 0 C = 0)
OR
(A = 0 B = 0 C = 1)
OR
(A = 0 B = 1 C = 1)
OR
(A = 1 B = 0 C = 0)
OR
(A = 1 B = 0 C = 1)

Verso la seconda forma canonica

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

Maxtermine, M_j,: e' un prodotto di <u>tutte</u> le variabili di ingresso al quale corrisponde un valore 0 per la funzione. (e.g. $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$).

j indica il numero progressivo in base 10.

Possibile espressione della seconda forma canonica:

$W \le 2^N$

$Q + W = 2^N$

$$F = \overline{\sum_{i=1}^{W} M_i}$$

$$F = \overline{\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,C + \bar{A}\,B\,C + A\,\bar{B}\,\bar{C} + A\,\bar{B}\,C}$$

Verso la seconda forma canonica: manipolazioni algebriche

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$$F = \overline{\sum_{i=1}^{W} M_i}$$

$W \leq 2^N$

$$F = \prod_{i=1}^{W} \overline{M_i}$$

Applico De Morgan

$$F = \overline{(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})}\,\overline{(\bar{A}\,\bar{B}\,C)}\;\overline{(\bar{A}\,B\,C)}\,\overline{(A\,\bar{B}\,\bar{C})}\,\overline{(A\,\bar{B}\,C)}$$

F = 1 quando nessun fattore si annulla

Razionale della seconda forma canonica

$$F = \overline{(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})}\,\overline{(\bar{A}\,\bar{B}\,C)}\;\overline{(\bar{A}\,B\,C)}\,\overline{(A\,\bar{B}\,\bar{C})}\,\overline{(A\,\bar{B}\,C)}$$

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

F = 1

iif

!(A = 0 B = 0 C = 0)
AND
!(A = 0 B = 0 C = 1)
AND
!(A = 0 B = 1 C = 1)
AND
!(A = 1 B = 0 C = 0)
AND
!(A = 1 B = 0 C = 1)

La seconda forma canonica: prodotto di somme

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$$F = \prod_{i=1}^{W} \overline{M_i}$$

$M_0 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} => \bar{M}_0 = A+B+C$

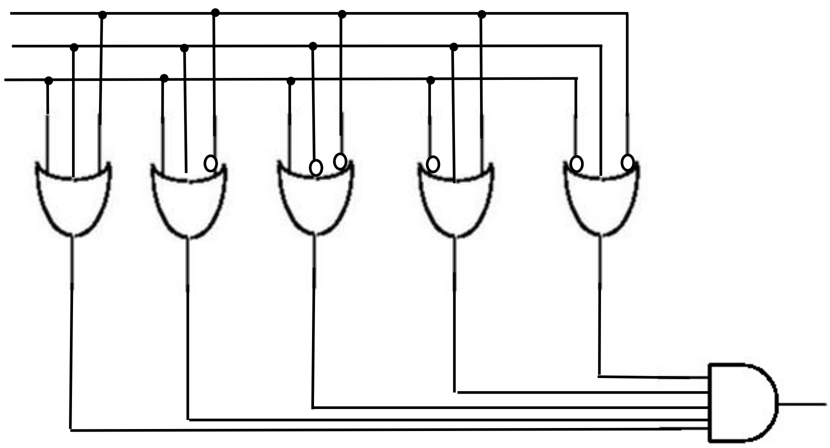
$$F = \overline{\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,C + \bar{A}\,B\,C + A\,\bar{B}\,\bar{C} + A\,\bar{B}\,C}$$

Applicando il secondo teorema di De Morgan:

$$\boxed{F = (A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+B+\bar{C})}$$

F = 1 quando nessun fattore si annulla

Il circuito della seconda forma canonica: POS



$$\boxed{F = (A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+B+\bar{C})}$$

Esempio 2

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} = \overline{A}\,\overline{C}$$

A B C	F
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

$$F=\overline{M_1}\,\overline{M_3}\,\overline{M_4}\,\overline{M_5}\,\overline{M_6}\,\overline{M_7}$$

$$F=(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Sommario

La seconda forma canonica.

Circuiti combinatori notevoli.

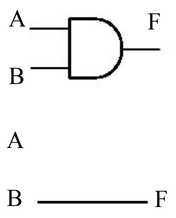
Uscite indifferenti di un tabella delle verità

A	B	F
0	0	0
0	1	X
1	0	0
1	1	1

Ho 2 possibilità:

$X = 0 \qquad F = A\,B$

$X = 1 \qquad F = \overline{A}\,B + AB = B$



Diminuisce il numero di porte e si accorcia il cammino critico.

Decodificatore (decoder)

• E' caratterizzato da n linee di input e 2^n linee di output

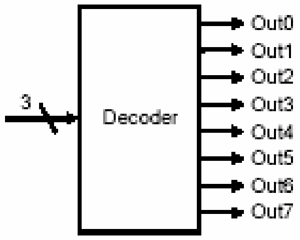
• il numero binario espresso dalla configurazione delle linee di input è usato per asserire la sola linea di output di ugual indice.

• es.: con 4 linee di input e 16 di output (da 0 a 15), se in ingresso arriva il valore 0110, in uscita si alza la linea di indice 5 (la sesta!).

• utilizzato per indirizzare la memoria (cf. ROM).

La funzione decoder

Decoder



a. A 3-bit decoder

A	B	C	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Le funzioni di uscita sono 2^n per n input:

U_0 = ~A ~B ~C

…

U_7 = A BC

$U_j = m_j$

Codificatore (endecoder)

- E' caratterizzato da n linee di input e ceil($\log_2 n$) linee di output

- Una sola linea di ingresso può essere attiva.

- il numero binario espresso dalla configurazione delle linee di output rappresenta la linea di ingresso attiva.

- es.: con 16 linee di input e 4 di output, se in ingresso arriva il valore 0000 0100 0000 0000, in uscita leggiamo il numero 10.

La funzione encoder

ABCD	Y_1Y_2
0000	X X
0001	0 1
0010	1 0
0011	X X
0100	1 1
0101	X X
0110	X X
0111	X X
1000	X X
1001	X X
1010	X X
1011	X X
1100	X X
1101	X X
1110	X X
1111	X X

Codifica le prime tre linee di ingresso (B C e D)

$$Y_1 = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} = \overline{A}\,\overline{D}\,(B \oplus C)$$

$$Y1 = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} = \overline{A}\,\overline{D}\,(B \oplus C)$$

La funzione encoder: ottimizzazione

ABCD	Y_1Y_2
0000	X X
0001	0 1
0010	1 0
0011	1 X
0100	1 1
0101	1 X
0110	X X
0111	X X
1000	X X
1001	X X
1010	X X
1011	X X
1100	X X
1101	X X
1110	X X
1111	X X

Codifica le prime tre linee di ingresso (B C e D)

$$Y_1 = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} = \overline{A}\,\overline{D}\,(B \oplus C)$$

$$Y1 = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D =$$

$$\overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} = \overline{A}\,(B \oplus C)$$

Si potrebbe ulteriormente semplificare considerando mintermini anche m10, m11, m13, m14.

Multiplexer

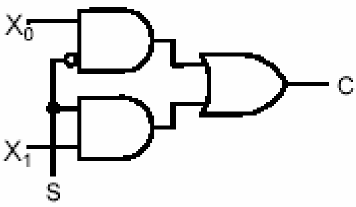
- E' caratterizzato da n linee di input (data),
- k linee di controllo (selezione).
- In base alla linea di controllo viene connessa all'uscita la linea di ingresso selezionata (cf. ROM).
- Quante linee di controllo, k, servono?

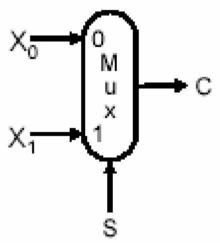
  $k = \text{ceil}(\log_2 n)$

Esempio: con 4 linee di input (da 0 a 3), se sulle linee di controllo c'è 11, in uscita si avrà il valore presente sulla linea 3

Multiplexer

S	x_0	x_1	C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1





Il segnale di selezione S, "apre" la porta opportuna, cioè chiude il cammino opportuno.

Sintesi della funzione Mux

S	x_0	x_1	C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

SOP: $C = \overline{S}\, x_0\, \overline{x_1} + \overline{S}\, x_0\, x_1 + S\, x_0\, \overline{x_1} + S\, x_0\, x_1$

$= \overline{S}\, x_0 + S\, x_1$ cvd

Il mux si comporta come interruttore

Sintesi della funzione Mux nella forma POS

S	x_0	x_1	C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

POS: $C = (S+x_0+x_1)(S+x_0+\overline{x_1})(\overline{S}+x_0+x_1)(\overline{S}+\overline{x_0}+x_1) =$

Definisco: $a = \overline{S}+x_1$

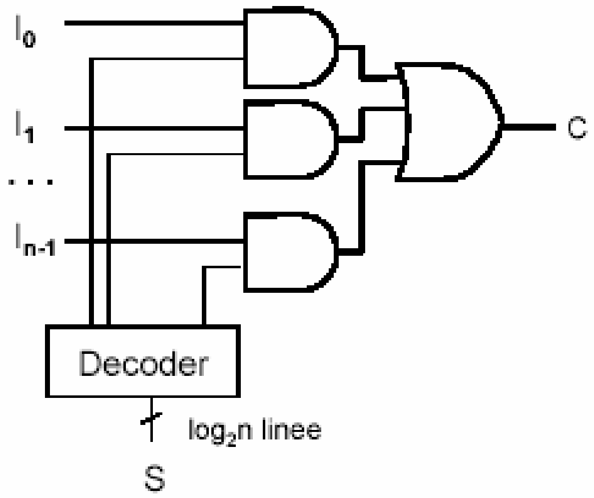
$b = S+x_0$

$[(b+x_1)(b+\overline{x_1})]\ [(a+x_0)(a+\overline{x_0})] =$

$[b+x_1\overline{x_1}]\ [a+x_0\overline{x_0}] = ba = (\overline{S} + x_1)(S + x_0) =$

$\overline{S}S + \overline{S}x_0 + Sx_1 + x_0x_1 = \overline{S}x_0 + Sx_1$ cvd

Mux a più vie.



Una sola porta alla volta viene aperta dal segnale S. Le porte sono mutuamente esclusive.

Comparatore

- E' caratterizzato da 2 insiemi di n linee di ingresso ciascuna e un output.
- L'output vale 1 se i due insiemi di bit hanno uguale valore, 0 se sono diversi.

A_0	B_0	C_0
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A_1	B_1	C_1
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

…

$$C = C_0\, C_1 \ldots C_{n-1}$$

$$C_k = \overline{a_k \oplus b_k}$$

Sommario

La seconda forma canonica.

Circuiti combinatori notevoli.