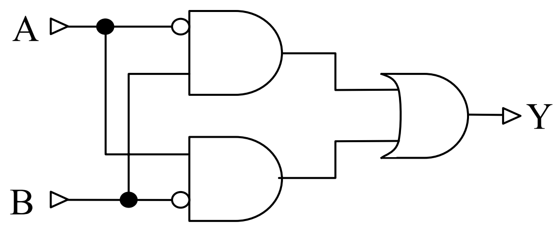
Esercitazione del 10/03/2005 - Soluzioni

Rappresentazioni possibili per una funzione logica:
(L04 -I circuiti binari: definizione delle funzioni logiche, p.26-29)

- **circuito logico:**



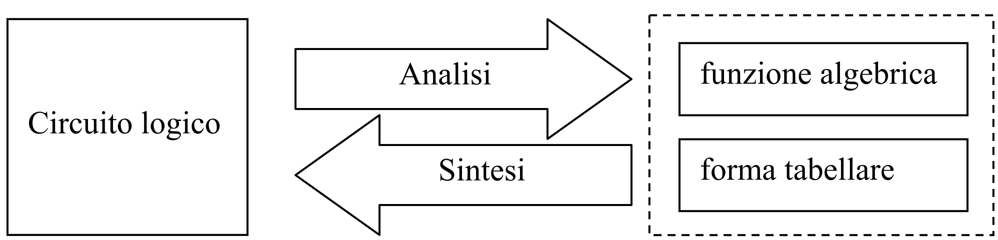
- **forma tabellare** (tabella lookup):

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- **formula algebrica:**

Y= (NOT A)B OR NOT(B) A

Sintesi e analisi di circuiti logici:



Massimo Marchi – marchi@dsi.unimi.it

Precedenza degli operatori logici:
(L04 -I circuiti binari: definizione delle funzioni logiche, p.31)

In assenza di parentesi, AND ha la priorità sull'OR ed il NOT su entrambi:

NOT > AND > OR

Principio di dualità:
(L04 -I circuiti binari: definizione delle funzioni logiche, p.34)

Il duale di una funzione si ottiene sostituendo:
AND con OR,OR con AND, 0 con 1 ed 1 con 0.

Proprietà generali dell'Algebra Booleana:
(L04 -I circuiti binari: definizione delle funzioni logiche, p.32)

0.	**Doppia Inversione**	$\sim(\sim x) = x$	
1.	**Identità**:	$1\,x = x$	$0 + x = x$
2.	**Elemento nullo**:	$0\,x = 0$	$1 + x = 1$
3.	**Idempotenza**:	$x\,x = x$	$x + x = x$
4.	**Inverso:**	$x \sim x = 0$	$x + \sim x = 1$
5.	**Commutativa**:	$x\,y = y\,x$	$x + y = y + x$
6.	**Associativa:**	$(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
7.	**Distributiva:**	$x\,(y + z) = x\,y + x\,z$	$x + y\,z = (x + y)\,(x + z)$
8.	**Assorbimento:**	$x\,(x + y) = x$	$x + x\,y = x$
9.	**De Morgan**:	$\sim(x\,y) = \sim x + \sim y$	$\sim(x + y) = \sim x\ \sim y$

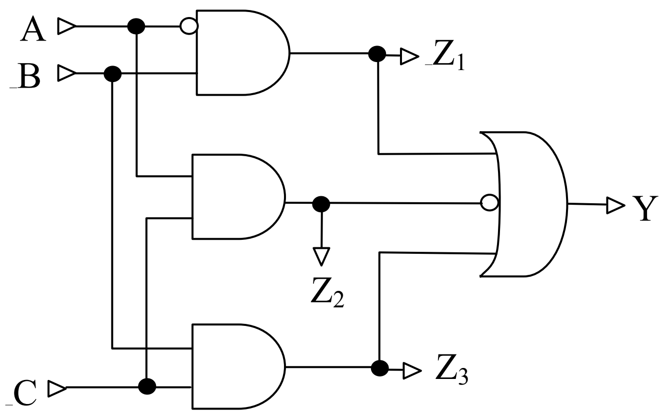
Forma Canonica SOP *(Sum Of Product)* :

Implicante → prodotto di variabili per cui una funzione vale 1
Mintermine → Implicante contenente tutte le variabili della funzione

Forma **SOP** di F → $F = \sum_{i=1}^{Q} m_j$ dove m_j è il j-esimo mintermine della funzione F

Ex: $\mathbf{A}$ XOR $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{A}}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\overline{\mathbf{B}}$

1. **Ricavare la forma tabellare , la pima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



A	B	C	~A	Z_1=~AB	Z_2=AC	Z_3=BC	~Z_2	**Y**=Z_1+~Z_2+Z_3
				AND				OR
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1

Nota: *una porta AND dà come risultato 0 quando uno dei suoi ingressi è 0. Per calcolare una colonna risultato di una AND allora è comodo procedere nel seguente modo: per ogni termine si identificano le celle a 0 e si pone a 0 la cella risultato corrispondente. Alla fine le celle ancora vuote si pongono ad 1. Analogamente il metodo duale può essere applicato alle porte OR: prima si identificano le celle risultato a 1 corrispondenti ai termini posti uguale a 1 quindi si completano le celle ancora vuote con 0.*

Ex. Si consideri il calcolo di Z_1. Il termine ~A va a zero per le ultime quattro configurazioni. Ne segue che Z_1 può essere posto a zero per le corrispondenti celle. Analogamente B è uguale a zero per le prime due configurazioni e per la 5^{ta} e la 6^{ta} . Ne segue che Z_1 può essere messo a 0 anche per le prime due celle. Le restanti celle saranno obbligatoriamente uguali ad 1.

Nota: Il numero di mintermini nella forma canonica SOP dipende è pari al numero di 1 nella colonna risultato. Viceversa il numero di maxtermini presenti nella seconda forma canonica POS è uguale al numero di 0 presenti. In questo caso quindi sarebbe più conveniente in termini di compattezza di descrizione usare la seconda forma canonica POS al posto della forma SOP.

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

Nota: E' comodo ricostruire la formula partendo dalle uscite e risalendo poi il circuito fino agli ingressi.

$$Y = (Z_1 + \sim Z_2 + Z_3) = (\sim AB + \sim(AC) + BC)$$
$$= (\sim AB + \sim A + \sim C + BC) \quad \leftarrow \textit{8b De Morgan}$$
$$= (\sim A + \sim C + BC) \quad \leftarrow \textit{6b Assorbimento}$$

Vale la seguente proprietà: $\mathbf{x + \sim xy = x + y}$

Dim:

$$\begin{aligned} \mathbf{x + \sim xy} &= (\mathbf{x + xy}) + \sim \mathbf{xy} && \leftarrow \textit{8b} \\ &= \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{xy} + \sim \boldsymbol{xy}) && \leftarrow \textit{6b} \\ &= \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y(x} + \sim \boldsymbol{x)} && \leftarrow \textit{7a} \\ &= \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y1} && \leftarrow \textit{4b} \\ &\mathbf{=} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} && \leftarrow \textit{1a} \end{aligned}$$

$$= (\sim A + \sim C + B) \quad \leftarrow \mathbf{x + \sim xy = x + y}$$
$$= \sim (A\sim BC) \quad \leftarrow \textit{8b De Morgan}$$

(~A+~C+B) *non è altro che l'unico maxtermine della seconda forma canonica.*

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale 1 corrisponde un mintermine.

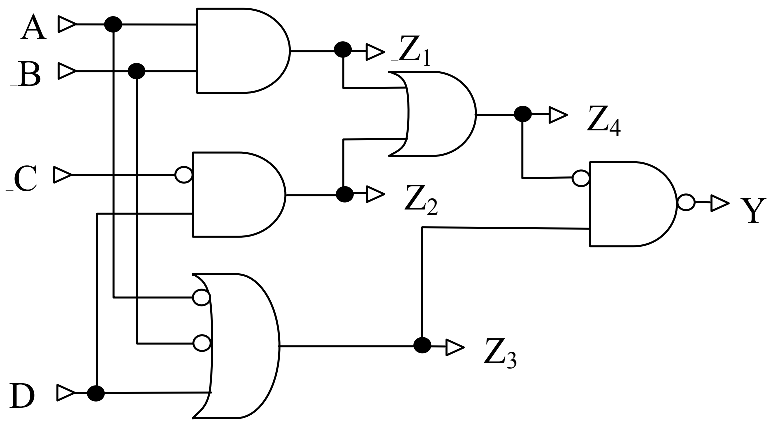
$$Y = \sim A\sim B\sim C + \sim A\sim BC + \sim AB\sim C + \sim ABC + A\sim B\sim C + AB\sim C + ABC$$

Semplifichiamo applicando varie volte la regola 7a e la regola 4b:

$$\boldsymbol{x\,y} + \sim \boldsymbol{x\,y} = (\boldsymbol{x} + \sim \boldsymbol{x})\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{1\,y} = \boldsymbol{y}$$

$$Y = \underline{\sim A\sim B\sim C + \sim A\sim BC} + \sim AB\sim C + \sim ABC + A\sim B\sim C + AB\sim C + ABC$$
$$Y = \sim A\sim B + \underline{\sim AB\sim C + \sim ABC} + A\sim B\sim C + AB\sim C + ABC$$
$$Y = \sim A\sim B + \sim AB + \underline{A\sim B\sim C + AB\sim C} + ABC$$
$$Y = \underline{\sim A\sim B + \sim AB} + A\sim C + ABC$$
$$Y = \sim A + \underline{A\sim C + ABC} \quad \leftarrow \textit{6b Associativa}$$
$$Y = \sim A + A(\underline{\sim C + BC}) \quad \leftarrow \mathbf{x + \sim xy = x + y}$$
$$Y = \underline{\sim A + A(\sim C + B)} \quad \leftarrow \mathbf{x + \sim xy = x + y}$$
$$Y = \underline{\sim A + \sim C + B} \quad \leftarrow \mathbf{x + \sim xy = x + y}$$
$$Y = \sim A + \sim C + B \quad \leftarrow \textit{8b DeMorgan}$$

2. **Ricavare la forma tabellare , la pima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.**



Forma tabellare:

A	**B**	**C**	**D**	~A	~B	~C	Z_1= AB	Z_2=~CD	Z_3=~A~BD	Z_4= Z_1+ Z_2	~Z_4	Z_3~Z_4	**Y**
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$$Y = \overline{(\overline{Z_4} + Z_3)} = \overline{(\overline{Z_1 + Z_2})\ (\overline{A}+\overline{B}+D)}$$

$$= \overline{(\overline{AB + \overline{C}D})\ (\overline{A}+\overline{B}+D)} \qquad \leftarrow 9a \quad \text{De Morgan}$$

$$= \overline{\overline{(AB + \overline{C}D)}} + \overline{(\overline{A}+\overline{B}+D)} \qquad \leftarrow 0 \quad \text{Doppia Negazione}$$

$$= (AB + \overline{C}D) + \overline{(\overline{A}+\overline{B}+D)} \qquad \leftarrow 9b \quad \text{De Morgan}$$

$$= (AB + \overline{C}D) + (\ \overline{(\overline{A}+\overline{B})}\ \overline{D})\ ) \qquad \leftarrow 9b \quad \text{De Morgan}$$

$$= (AB + \overline{C}D) + (\overline{\overline{A}}\ \ \overline{\overline{B}}\ \overline{D}) \qquad \leftarrow 9b \quad \text{De Morgan}$$

$$= (AB + \overline{C}D + (AB\overline{D}) \qquad \leftarrow 5b \quad \text{Commutativa}$$

$$= AB + (AB\overline{D}) + \overline{C}D \qquad \leftarrow 8b \quad \text{Assorbimento}$$

$$= \mathbf{AB + \overline{C}D}$$

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

Y = ~A~B~CD + ~AB~CD + A~B~CD + AB~C~D + AB~CD + ABC~D + ABCD

Semplifichiamo applicando varie volte: ***x y*** + ~***x y*** = ***y***

Y = ~A~B~CD + ~AB~CD + A~B~CD + AB~C~D + AB~CD + <u>ABC~D + ABCD</u>

= ~A~B~CD + ~AB~CD + A~B~CD + <u>AB~C~D + AB~CD</u> + ABC

= ~A~B~CD + ~AB~CD + A~B~CD + <u>AB~C + ABC</u>

= <u>~A~B~CD</u> + ~AB~CD + <u>A~B~CD</u> + AB

= ~B~CD + ~AB~CD + AB

Applico sul termine AB la regola di 8b: ***x* = *x* + *x y***

= ~B~CD + <u>~AB~CD</u> + AB + <u>AB~CD</u>

= <u>~B~CD + B~CD</u> + AB

= ~CD + AB = **AB + ~CD**