


Moltiplicatori HW e ALU

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
borghese@di.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti: Appendice B5 prima parte.
Per approfondimenti, Capitolo 7 del Fummi, Sami, Silvano.

Sommario

Moltiplicatori

ALU

Moltiplicazione mediante shift

Lo **shift** di un numero a sinistra, di k cifre, corrisponde a una **moltiplicazione** per la base elevata alla k-esima potenza.

Lo **shift** di un numero a destra, di k cifre, corrisponde a una **divisione** per la base elevata alla k-esima potenza.

Esempio nel caso decimale:

$213_{10} \times 10 = 2130_{10}$

$213_{10} = (2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0)$ **$\times 10^1$** =

$(2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0)$ **$\times 10^1$** =

$(2 \times 10^2$ **$\times 10^1$** $+ 1 \times 10^1$ **$\times 10^1$** $+ 3 \times 10^0$ **$\times 10^1$**$) =$

$(2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1) = 2130$ cvd.

$213_{10} / 10 = 21{,}3_{10}$

$213_{10} = (2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0)$ **$/ 10^1$** =

$(2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0)$ **$\times 10^{-1}$** =

$(2 \times 10^2$ **$\times 10^{-1}$** $+ 1 \times 10^1$ **$\times 10^{-1}$** $+ 3 \times 10^0$ **$\times 10^{-1}$**$) =$

$(2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1}) = 21{,}3$ cvd.

Moltiplicazione mediante shift

Lo **shift** di un numero a sinistra, di k cifre, corrisponde a una **moltiplicazione** per la base elevata alla k-esima potenza.

Lo **shift** di un numero a destra, di k cifre, corrisponde a una **divisione** per la base elevata alla k-esima potenza.

Esempio nel caso binario:

23 * 4 = 92 => 10111 * 100 = 1011100

Esprimendo l'operazione in decimale:

$(1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0) \times 2^2 =$

$(1x2^6 + 0x2^5 + 1x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2) = 64 + 16 + 8 + 4 = 92$ cvd.

23 / 4 = 5, 75 => 10111 / 100 = 101,11

Esprimendo l'operazione in decimale:

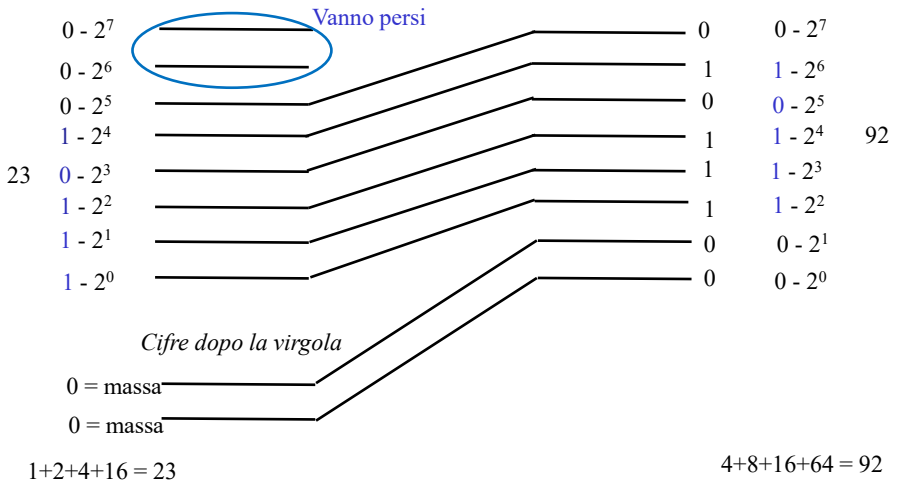
$(1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0) \times 2^{-2} =$

$(1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 1x2^{-1} + 1x2^{-2}) = 5{,}75$ cvd.

Moltiplicazione mediante shift, caso binario

Codifica su 8 + 2 cifre decimali:

23 * 4 = 92 => 00010111 * 100 = 01011100



1+2+4+16 = 23

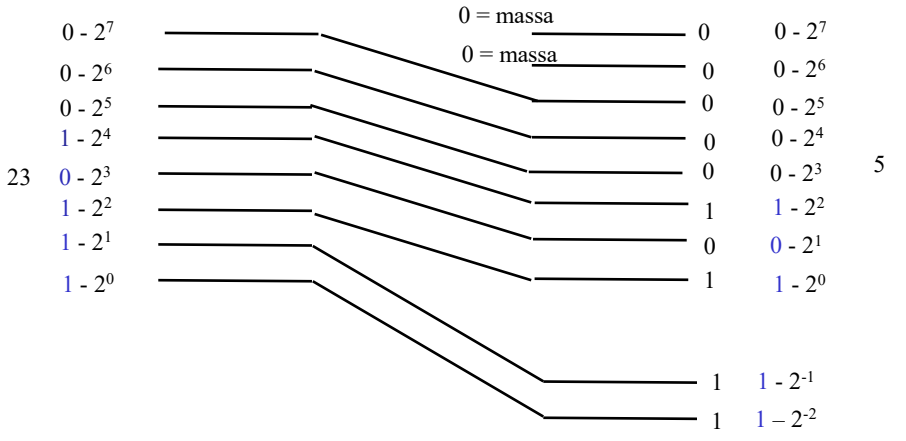
4+8+16+64 = 92

5

Divisione mediante shift, caso binario

Codifica su 8 + 2 cifre decimali:

23 / 4 = 5(,75) => 00010111 / 100 = 00000101(,11)



1+2+4+16 = 23

1/4+1/2+1 = 0,75

6

Moltiplicazione decimale

Moltiplicando → 2 7 8 x

Moltiplicatore → 4 2 3 =

Prodotti parziali → 8 3 4 +

5 5 6 -

1 1 1 2 - -

Prodotto finale → 1 1 7 5 9 4

$278 \times 423 = 278 \times (4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0) =$
$278 \times (4 \times 10^2) + 278 \times (2 \times 10^1) + 278 \times (3 \times 10^0)$

Somma dei prodotti parziali

Moltiplicazione binaria - I

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 1 (1) =

---

1 1 0 1 1 x 27_{10}

1 1 1 = 7_{10}

1° prodotto parziale 1 1 0 1 1 +

1 1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 –

1 1 0 1 1 - -

Prodotti parziali

---

1 0 1 1 1 1 0 1 189_{10} ← Prodotto finale

Somma dei prodotti parziali

Moltiplicazione binaria - II

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 (1) 1 =

---

1 1 0 1 1 x 27_{10}

1 1 1 = 7_{10}

---

1 1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 –

1 1 0 1 1 - -

---

1 0 1 1 1 1 0 1 189_{10}

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 -

---

2 prodotti parziali

Il secodo prodotto parziale è incolonnato alle potenze di 2^1 (la cifra del moltiplicatore ha peso 2^1)

Ho generato 2 addendi (2 prodotti parziali)
Provvedo subito alla loro somma

Moltiplicazione binaria - III

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 1 1 =

---

1 1 0 1 1 x 27_{10}

1 1 1 = 7_{10}

---

1 1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 –

1 1 0 1 1 - -

---

1 0 1 1 1 1 0 1 189_{10}

1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 -

1ª Somma Parziale → 1 0 1 0 0 0 1 +

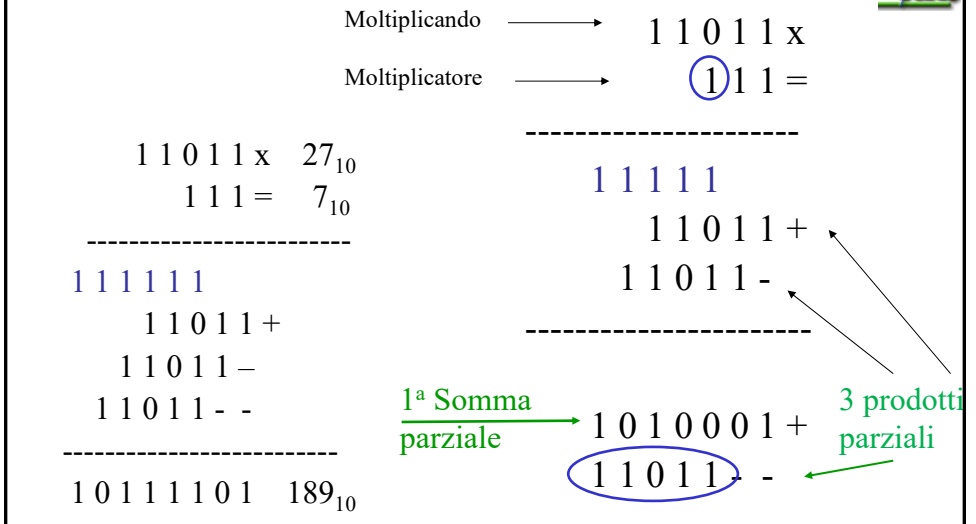
$1010001_2 = 81_{10}$

$11011_2 \times 11_2 = 27_{10} \times 3_{10}$

2 prodotti parziali

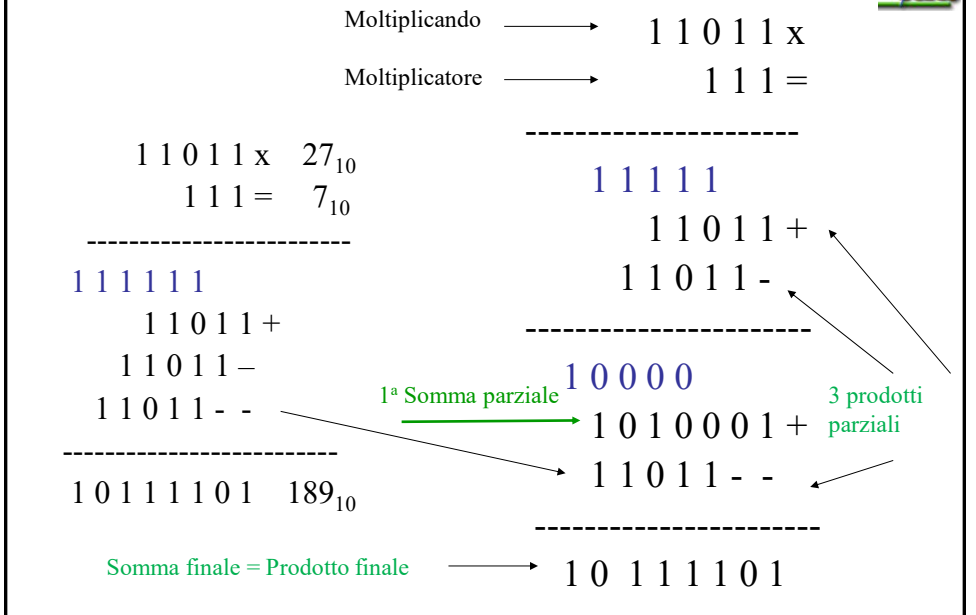
$P = \mathbf{P_0} + \mathbf{P_1} + P_2 = (\mathbf{P_0} + \mathbf{P_1}) + P_2 =$
$= S_0 + P_2$

Moltiplicazione binaria - IV

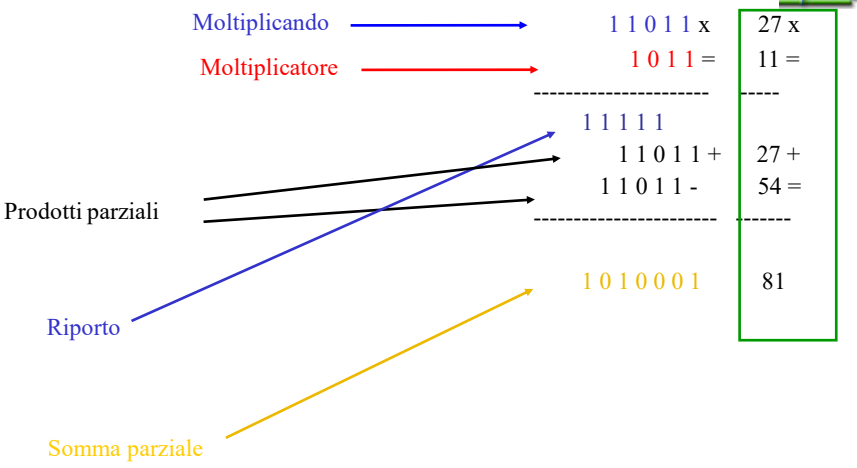


Il terzo prodotto parziale è incolonnato alle potenze di 2^2 (la cifra del moltiplicatore ha peso 2^2)

Moltiplicazione binaria - V

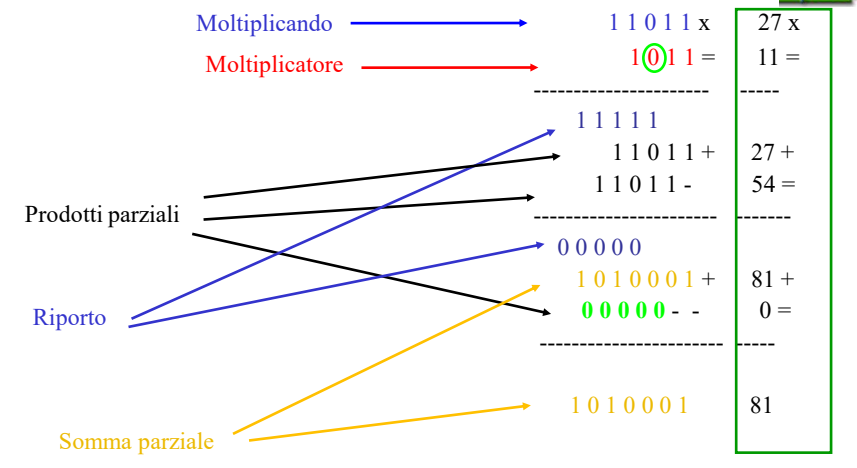


Moltiplicazione binaria - I



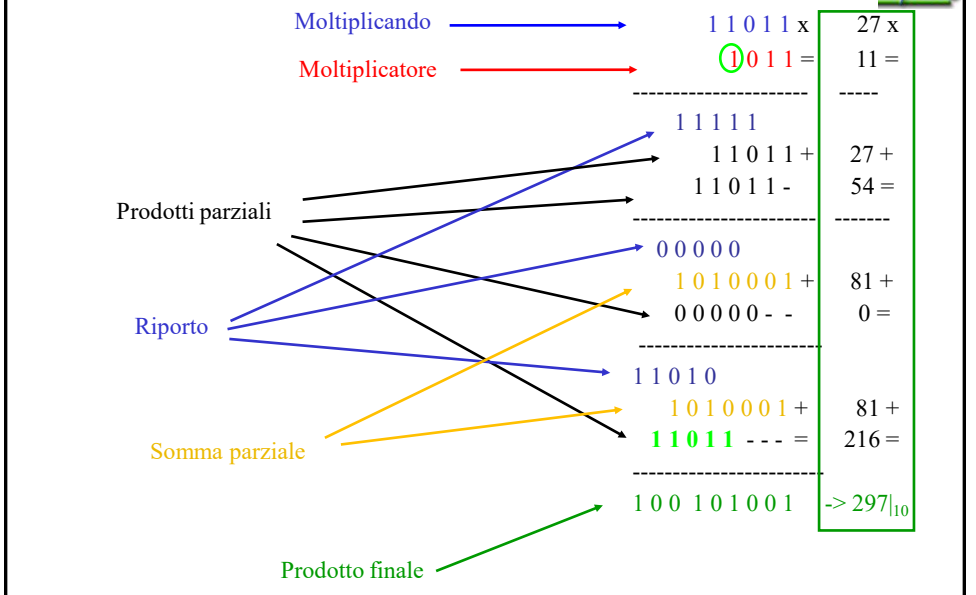
13

Moltiplicazione binaria - II

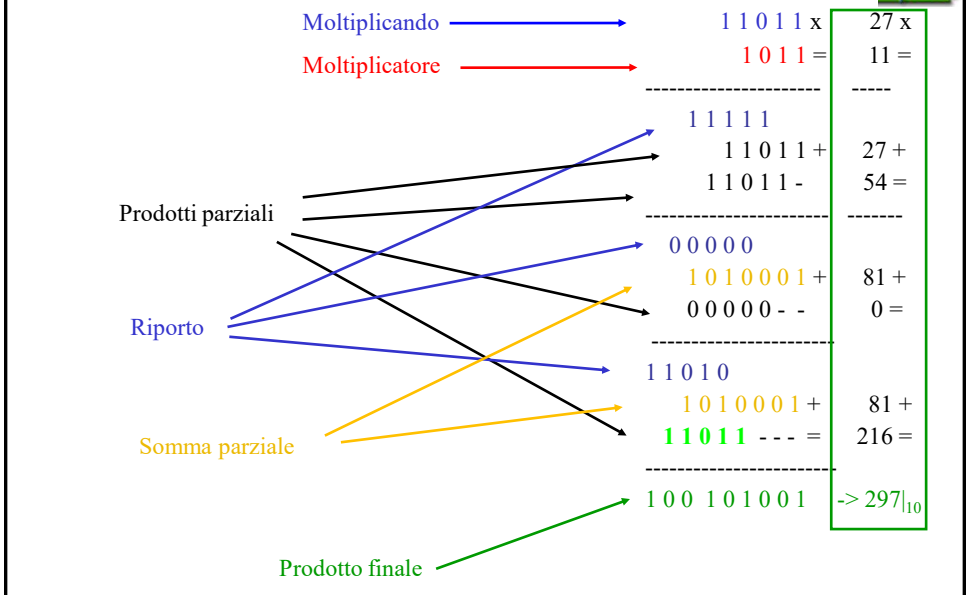


14

Moltiplicazione binaria - III

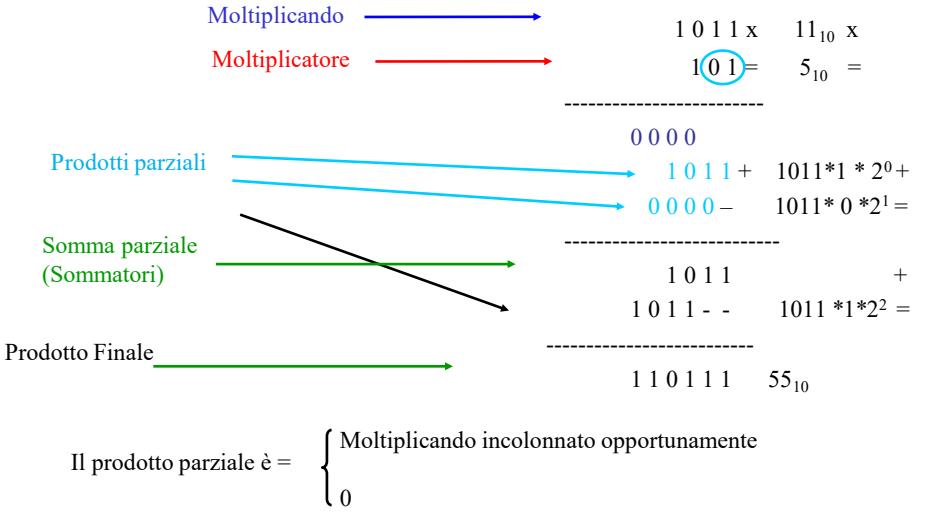


Moltiplicazione binaria - IV



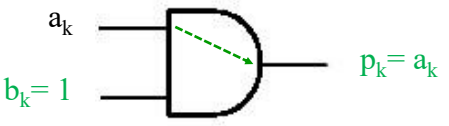
$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = ((P_0+P_1) + P_2) + P_3 = (S_0 + P_2) + P_3 = S_1 + P_3$

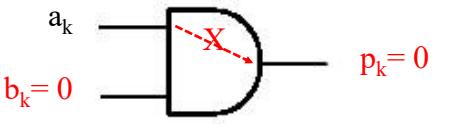
Moltiplicazione binaria (su 4 bit)



Il prodotto parziale è = { Moltiplicando incolonnato opportunamente ; 0

Moltiplicazione su 1 bit





AND non solo semaforo, ma anche moltiplicatore a 1 bit!

La moltiplicazione binaria

Possiamo vederla come:

Un primo stadio in cui si mette in AND ciascun bit del moltiplicatore con il moltiplicando (**prodotto parziale**).

Un secondo stadio in cui si effettuano le **somme dei prodotti parziali** (full adder): somma dei bit su due righe diverse.

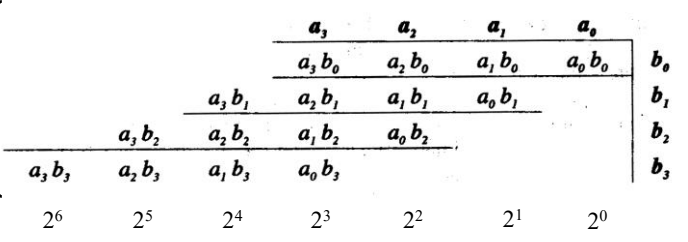
```
  1 1 0 1 1 x      27 x
    1 0 1 1 =      11 =
-------------------  -----
    1 1 1 1 1
      1 1 0 1 1 +  27 +
    1 1 0 1 1 -    54 =
-------------------  -------
  0 0 0 0 0
    1 0 1 0 0 0 1 +  81 +
  0 0 0 0 0 - -      0 =
-------------------
1 1 0 1 0
    1 0 1 0 0 0 1 +  81 +
  1 1 0 1 1 - - - =  216 =
-------------------
1 0 0  1 0 1 0 0 1   -> 297|10
```


La matrice dei prodotti parziali

A e B su 4 bit

1 1 0 1

Prodotti parziali



1 0 1 1

In binario i prodotti parziali sono degli AND.

Sulla linea tanti AND quanto è la lunghezza di A
Tanti prodotti parziali quanto è la lunghezza di B

La matrice dei prodotti parziali

1 1 0 1

Prodotti parziali

		a_3	a_2	a_1	a_0	
		$a_3 b_0$	$a_2 b_0$	$a_1 b_0$	$a_0 b_0$	b_0
	$a_3 b_1$	$a_2 b_1$	$a_1 b_1$	$a_0 b_1$		b_1
$a_3 b_2$	$a_2 b_2$	$a_1 b_2$	$a_0 b_2$			b_2
$a_3 b_3$	$a_2 b_3$	$a_1 b_3$	$a_0 b_3$			b_3

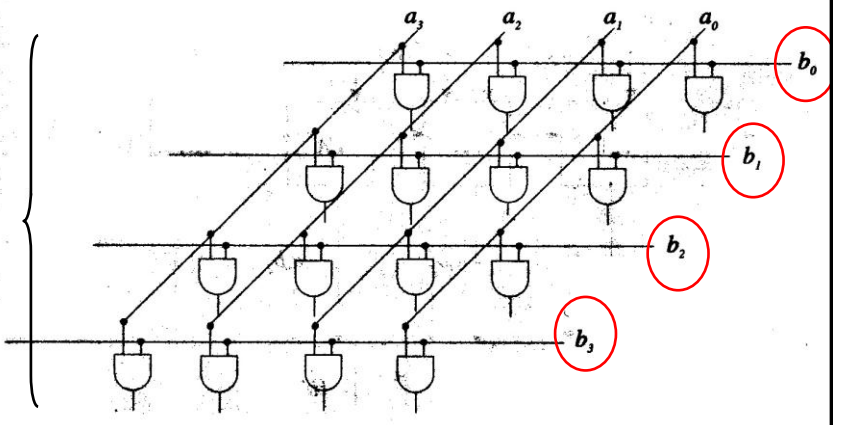
1 0 1 1

Il bit i-esimo del moltiplicatore, b_i, fa passare 0 o il moltiplicando (prodotto parziale)
Il prodotto parziale viene incolonnato opportunamente.

b_0 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_0
b_1 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_1
b_2 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_2
b_3 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_3
.....

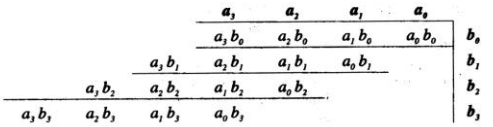
Il circuito che effettua i prodotti

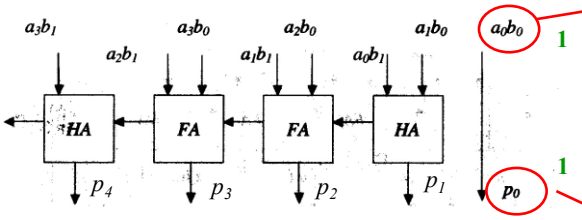
Prodotti parziali



b_k agisce come interruttore, facendo passare 0 o A_k

Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - I

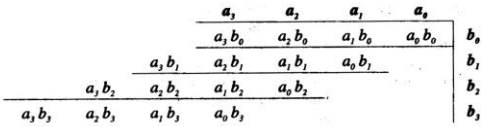


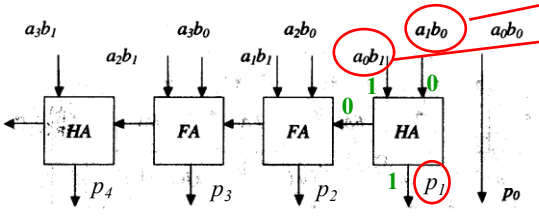


Somma dei primi 2 prodotti parziali

```
1 1 0 1 x      13 x
1 0 1 1 =      11 =
----------------------
  1 1 0 0
    1 1 0 1 +
  1 1 0 1 -
----------------------
  0 0 0 0
  1 0 0 1 1 1 +
  0 0 0 0 - -
------------------------
1 1 0 0
  1 0 0 1 1 1 +
  1 1 0 1 - - - =
------------------------
1 0 0 0 1 1 1 1   -> 143|10
```


Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - II

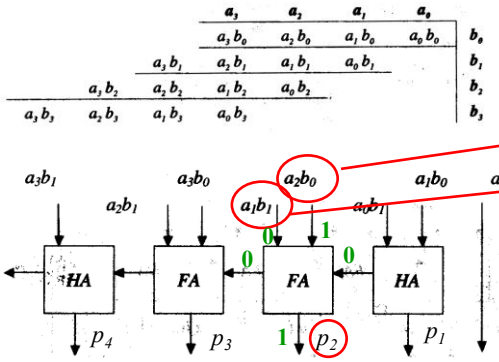




Somma dei primi 2 prodotti parziali → 1a somma parziale

```
1 1 0 1 x      13 x
1 0 1 1 =      11 =
----------------------
  1 1 0 0 0
    1 1 0 1 +
  1 1 0 1 -
----------------------
  0 0 0 0
  1 0 0 1 1 1 +
  0 0 0 0 - -
----------------------
1 1 0 0
  1 0 0 1 1 1 +
  1 1 0 1 - - - =
----------------------
1 0 0 0 1 1 1 1   -> 143|10
```

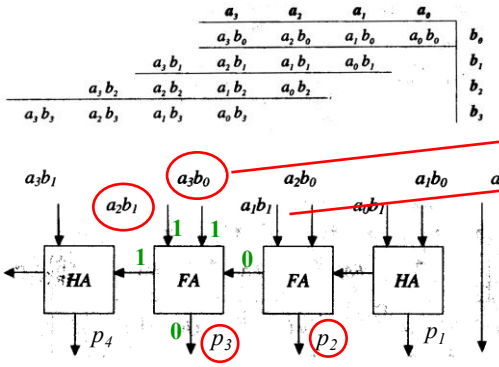
Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - III



Somma dei primi 2 prodotti parziali → 1a somma parziale

```
1 1 0 1 x      13 x
1 0 1 1 =      11 =
----------------------
  1 1 0 0 0
    1 1 0 1 +
    1 1 0 1 -
----------------------
    0 0 0 0
  1 0 0 1 1 1 +
    0 0 0 0 - -
------------------------
  1 1 0 0
  1 0 0 1 1 1 +
  1 1 0 1 - - - =
----------------------
1 0 0 0 1 1 1 1   -> 143|10
```

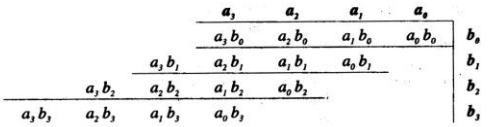

Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - IV

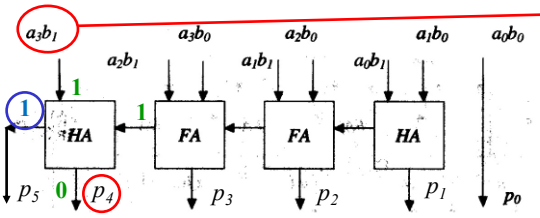


Somma dei primi 2 prodotti parziali → 1a somma parziale

```
1 1 0 1 x      13 x
1 0 1 1 =      11 =
----------------------
  1 1 0 0 0
    1 1 0 1 +
    1 1 0 1 -
----------------------
    0 0 0 0
  1 0 0 1 1 1 +
    0 0 0 0 - -
------------------------
  1 1 0 0 0
  1 0 0 1 1 1 +
  1 1 0 1 - - - =
----------------------
1 0 0 0 1 1 1 1   -> 143|10
```

Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - V





Somma dei primi 2 prodotti parziali → 1a somma parziale

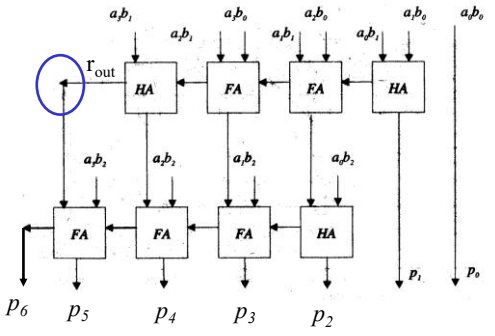
Dove va il riporto in uscita all'ultimo FA?

```
1 1 0 1 x      13 x
1 0 1 1 =      11 =
----------------------
  1 1 0 0 0
    1 1 0 1 +
  1 1 0 1 -
-----------------------
    0 0 0 0
      1 0 0 1 1 1 +
      0 0 0 0 - -
-----------------------
  1 1 0 0
      1 0 0 1 1 1 +
    1 1 0 1 - - - =
-----------------------
  1 0 0 0 1 1 1 1   -> 143|10
```


Somma della terza riga

I primi due prodotti parziali sono ottenuti dalla prima batteria di sommatori.

Ogni altro prodotto parziale è sommato da un'ulteriore batteria di sommatori.




```
1 1 0 1 x      13 x
1 0 1 1 =      11 =
----------------------
  1 1 0 0 0
    1 1 0 1 +
  1 1 0 1 -
-----------------------
  0 0 0 0 0
    1 0 0 1 1 1 +
    0 0 0 0 - -
-----------------------
  1 1 0 0
    1 0 0 1 1 1 +
  1 1 0 1 - - - =
-----------------------
  1 0 0 0 1 1 1 1   -> 143|10
```

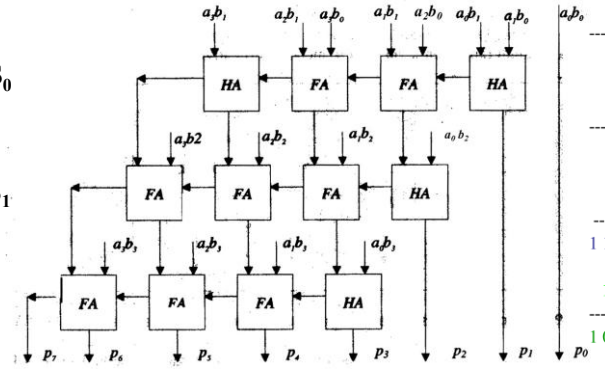
Circuito completo della somma dei prodotti parziali

N-1 batterie di sommatori

$P_0+P_1 \rightarrow S_0$

$S_0+P_2 \rightarrow S_1$

$S_1+P_3 \rightarrow P$




```
11011 x      27 x
 1011 =      11 =
-----------  ----
11111
11011 +      27 +
11011 -      54 =
-----------  ----
00000
10100 01 +   81 +
00000 - -    0 =
-----------
11010
10100 01 +   81 +
11011 - - - =  216 =
-----------
100 101001   -> 297|10
```

Problema: A e B su 4 bit => P su 8 bit (prodotto su 2N bit)

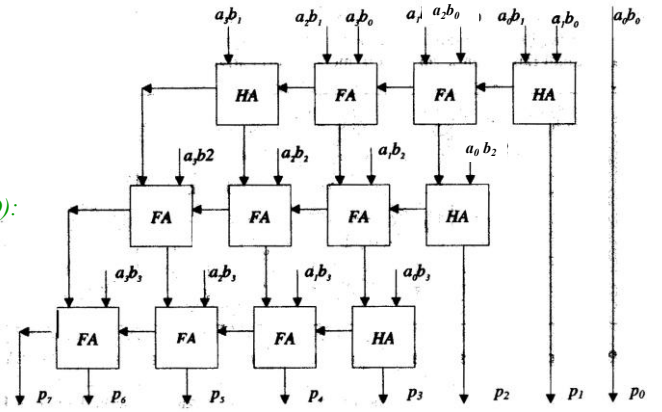
Valutazione della complessità

Complessità:
Half Adder: 2 porte
Full Adder: 5 porte

Stadio prodotti (AND):

A su N bit
B su N bit

N * N porte AND



Stadio Somme:

Se N = M = 4 numero totale di porte a 2 ingressi = 5

N sommatori per linea
N-1 linee

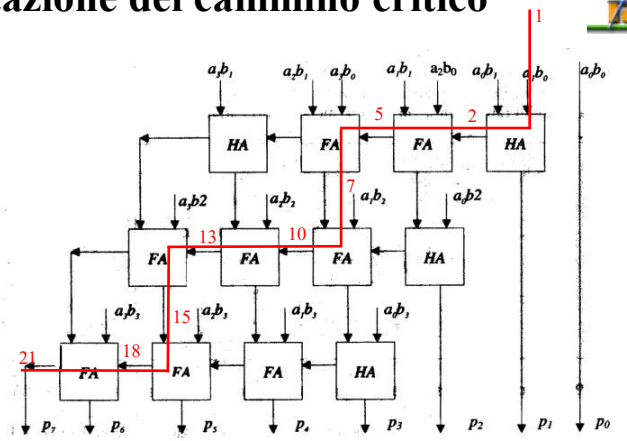
	Numero linee	Numero FA per linea	Numero HA per linea	Complessità Prima linea	Prodotti Parziali
CO_{Tot} =	(N-2) *	[(N-1) * 5	+ 1 * 2] +	(N-2)*5 +2*2 +	N * N

Valutazione del cammino critico

Cammini critici:
Half Adder:
Somma – 1 porta
Riporto – 1 porta
Full Adder:
Somma - 2 porte
Riporto - 3 porte

Gli AND operano in para ritardo 1.

HA e FA non sono equivalenti per il cammino critico



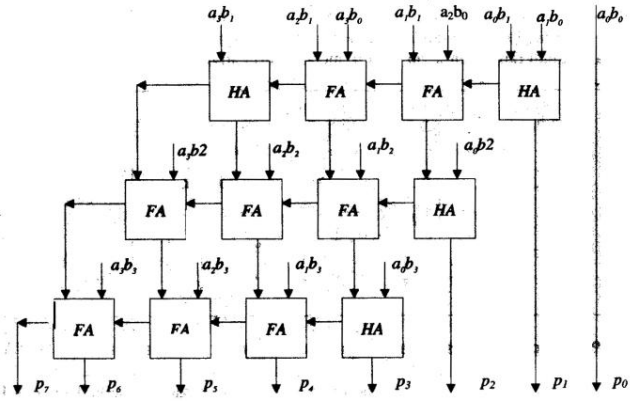
21 20 17 14 10 5 2 1

Se N = 4 cammino critico totale = 21

Osservazioni

Cammini critici:
Half Adder:
Somma – 1 porta
Riporto – 1 porta
Full Adder:
Somma - 2 porte
Riporto - 3 porte

Gli AND operano in parallelo: ritardo 1.



Architettura **modulare**, ogni schiera di sommatori lavora sul risultato della schiera superiore e fornisce l'input alla schiera inferiore

Il prodotto è su 2*N cifre. Situazione da gestire da parte delle architetture che hanno registri su N bit.

Quanto si guadagna sostituendo ai sommatori a propagazione di riporto sommatori ad anticipazione di riporto?

Sommario

Moltiplicatori

ALU

Funzione della ALU

E' integrata nel processore, all'inizio degli anni 90 è stata rivoluzionaria la sua introduzione con il nome di co-processore matematico.

Esegue le operazioni aritmetico-logiche.

Utilizza i blocchi di base già visti.

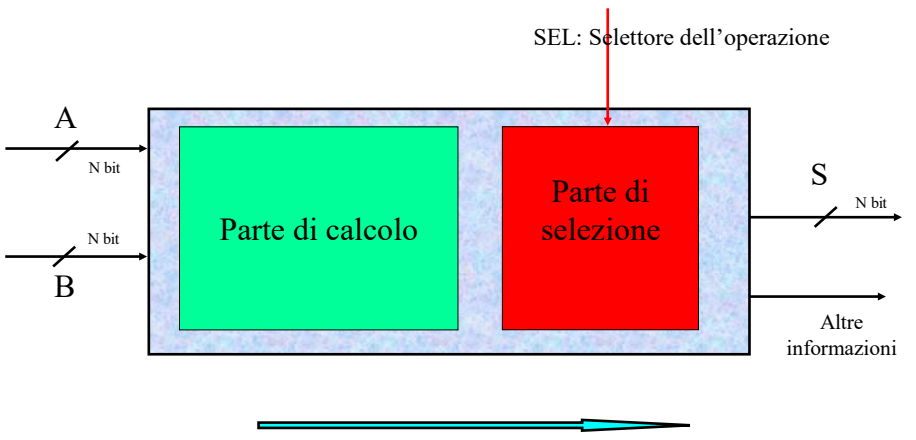
Opera su parole (MIPS 32 bit / 64 bit).

Le ALU non compaiono solamente nei micro-processori.

Problematiche di progetto

- Velocità (Riporto).
- Costo.
- Precisione.
- Affidabilità
- Consumo energetico.

Struttura a 2 livelli di una ALU

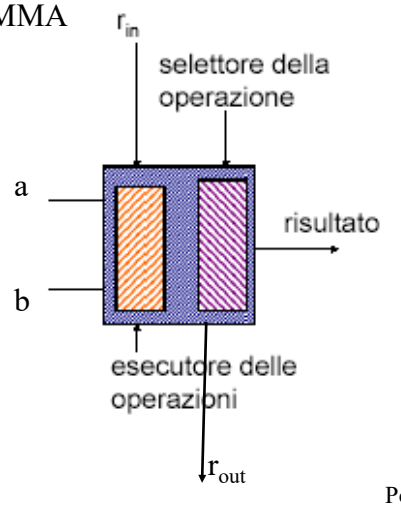


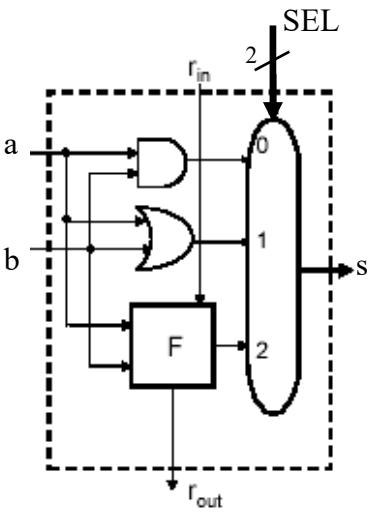
Flusso dell'elaborazione

Esempio di esecuzione condizionata.

La nuova struttura della ALU – 1 bit

- AND
- OR
- SOMMA



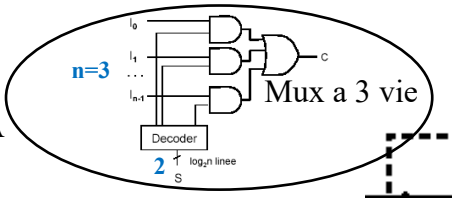


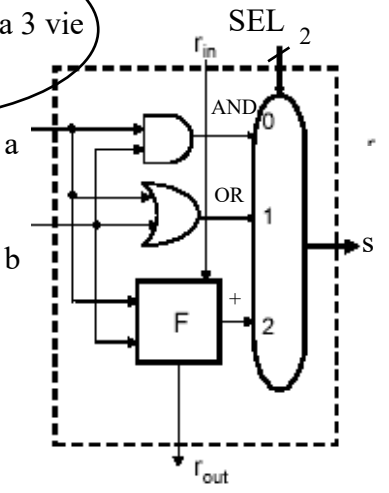
Perchè SEL non viene messo in ingresso?

37

Valutazione ALU a 1 bit

- AND
- OR
- SOMMA





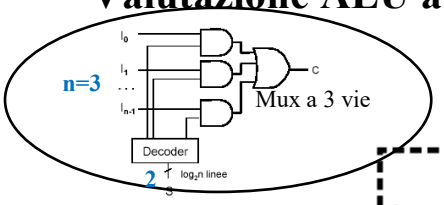
Complessità 1° livello (calcolo): 5+2 = 7
Complessità 2° livello (mux): 3*1+(3+2) = 8
(Decoder + AND (semaforo) + OR (congiunzione)

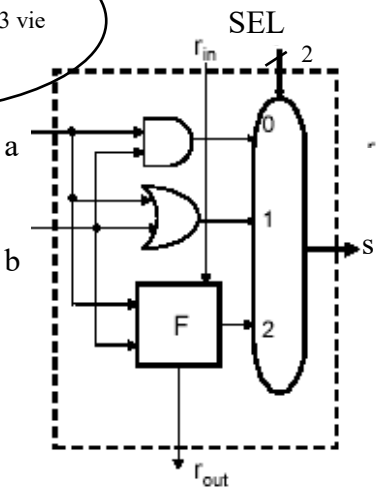
Complessità totale: 7+8 = 15

38

Valutazione ALU a 1 bit

- AND
- OR
- SOMMA





CC 1° livello: 2 per s_{out}, 3 per r_{out}

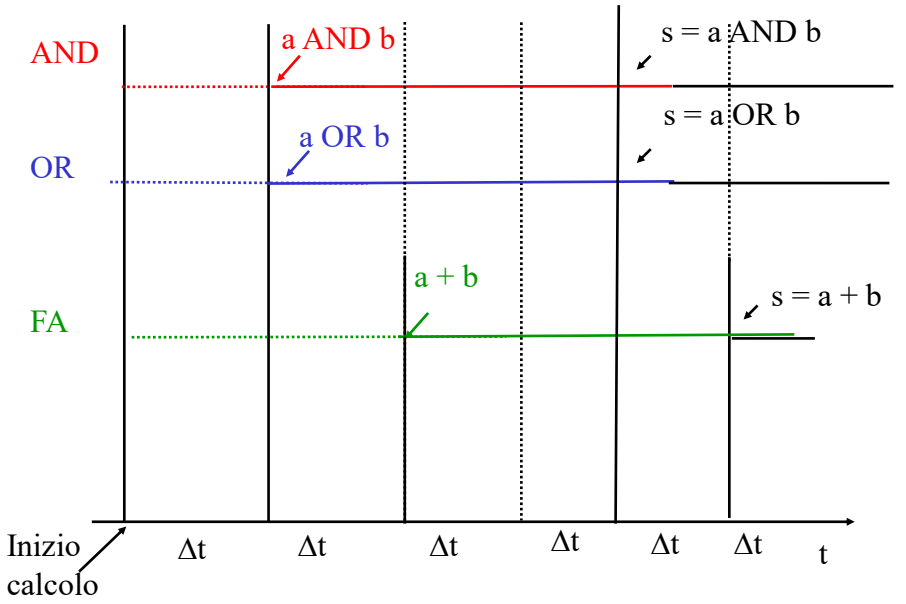
CC 2° livello: 4 (1 Decoder + (1 AND - semaforo + 2 OR (congiunzione)

CC complessivo: 2 (calcolo) + [1 AND (semaforo)+ 2 (OR – selezione)] = 5!!

Il CC del decoder non viene contato: gli AND del decoder interni al mux sono attivati in parallelo ai circuiti di calcolo.

Il CC considerato è quello della somma per valutare il tempo necessario perchè commuti s.

I cammini critici all'interno della ALU

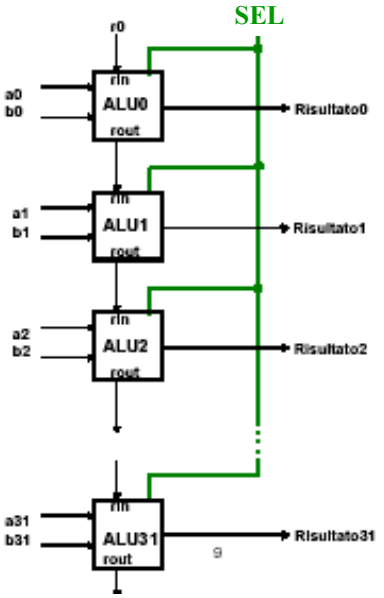


ALU a 32 bit

Come collegare le ALU ad 1 bit?

Flusso di calcolo

Perchè non si può parallelizzare?



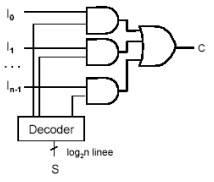
Valutazione ALU a 32 bit

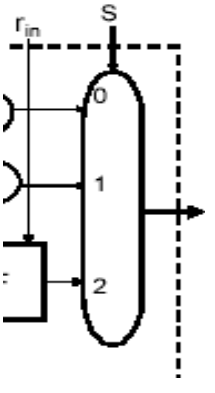
Complessità: 15 x 32 = 480 porte logiche

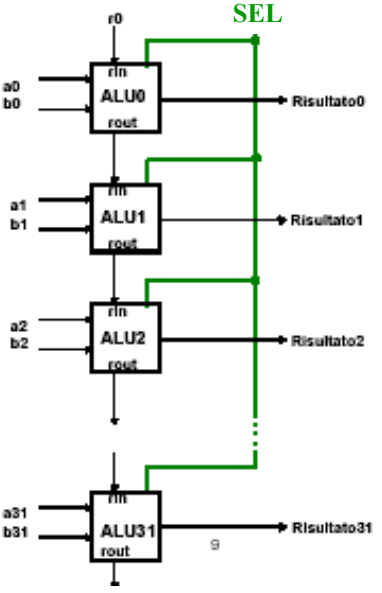
Cammino critico:
- 3 x 32 (propagazione riporti) del sommatore
- 3 (parte centrale del mux: semaforo + OR uscita di s_{31})

Totale = 99 porte logiche

per 4 operazioni su 32 bit







Sottrazione

In complemento a 2 diventa un'addizione: $a - b = a + \bar{b} + 1 = 1 + a + \bar{b}$

Esempio: s = 3 – 4; su 3 bit

3 -> 011	011 +
-4 -> 100 in complemento a 2	100 =
-1 -> 111 in complemento a 2	111

Posso scrivere il numero negativo in complemento a 2 come somma:

	4 -> 100	numero positivo:	b
Passo I – Complemento a 1	011+	complemento a 1:	$\bar{b}$+
Passo II – Sommo + 1	1=	sommo 1:	1=
Risultato – Complemento a 2	100	risultato	-b

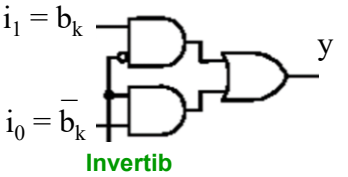
Posso quindi scrivere: $-b = \bar{b} + 1$

Sottrazione

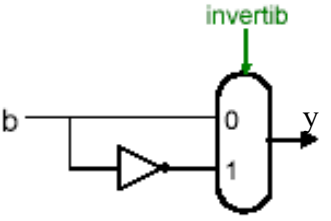
In complemento a 2 diventa un'addizione: $a - b = a + \bar{b} + 1$

Serve:
a) un inverter (NOT).
b) la costante 1

Mux



a)



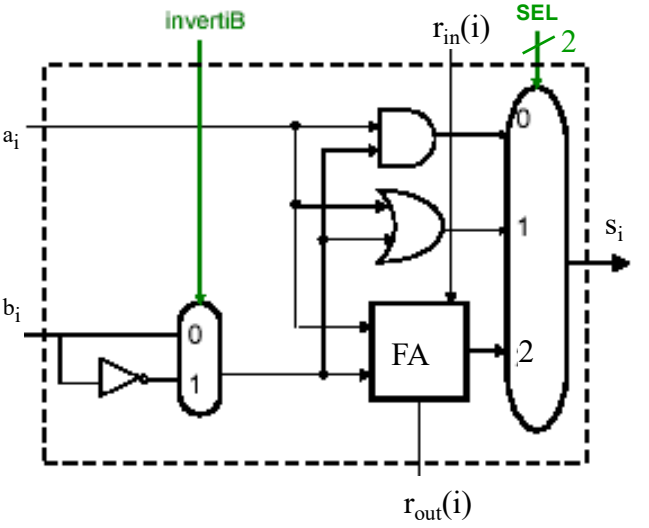
Iff invertib
y = !b

Aggiunge 2 porte logiche al cammino critico in ogni stadio. y viene calcolato in parallelo su tutti gli stadi.
Aggiunge 2 porte per ogni stadio.

b) Da dove prendo la costante 1?

Sottrazione - ALU_i

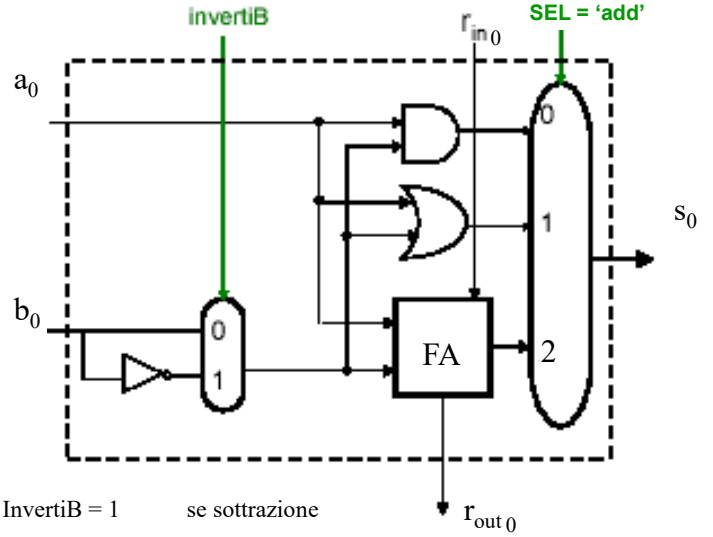
Operazioni:
- AND
- OR
- SOMMA
- SOTTRAZIONE



$r_{in}(i) = r_{out}(i-1)$ i = 1,2,3,....31
InvertiB = 1

$\mathbf{i \neq 0}$ (tranne che nel primo stadio)
se sottrazione

Sottrazione – primo stadio: ALU_0



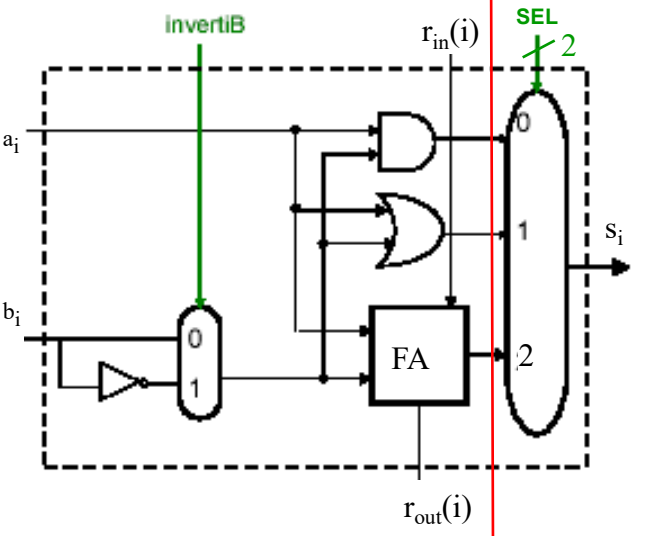
$r_{in}(0)$ = InvertiB = 1 se sottrazione

(occorre utilizzare un full adder anche per il bit meno significativo con $r_{in0} = 1$).
Effettuo quindi la somma di 1 con la somma della prima coppia di bit.

Operazioni - ALU_i

E' possibile programmare questa ALU per eseguire:

1) a AND !b
2) a OR !b
3) a + b
4) a - b



La parte di calcolo è comunque separata dalla parte di selezione

Sottrazione: ALU a 32 bit

$r_{in}(0)$ = InvertiB = 1 se sottrazione

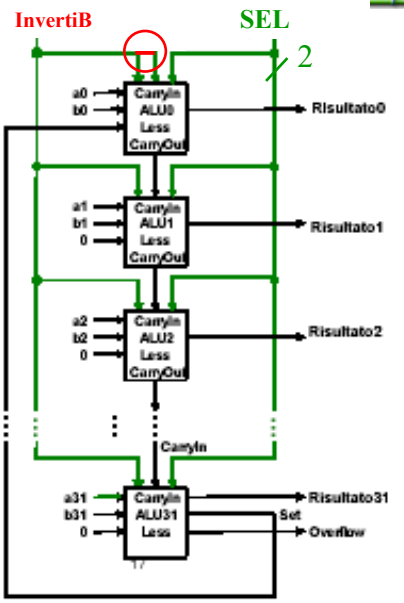
- AND
- OR
- SOMMA
- SOTTRAZIONE

From_UC	SEL	r_0	InvertiB
And	And	0	0
Or	Or	0	0
Somma	Add	0	0
Sottr.	Add	1	1

InvertiB e r_0 sono lo stesso segnale, si può ancora ottimizzare.

$r_{in}(0)$ entra solo in ALU_0

InvertiB entra in tutte le ALU_i



ALU a 32 bit con CLA

- Come realizzare una ALU a 32 bit con:
  - Porte OR
  - Porte AND
  - CLA a 4 bit?

Definire complessità e cammino critico

Notate che l'inverter su b aggiunge complessità e cammino critico.

Sommario

Moltiplicatori

ALU