Moltiplicatori HW e ALU

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
borghese@di.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti: Appendice B5 prima parte.
Per approfondimenti, Capitolo 7 del Fummi, Sami, Silvano.

Sommario

Moltiplicatori

ALU

Moltiplicazione mediante shift

Lo shift di un numero a dx, di k cifre, corrisponde ad una divisione per la base elevata alla k-esima potenza.

Lo shift di un numero a sx, di k cifre, corrisponde ad una moltiplicazione per la base elevata alla k-esima potenza.

Esempio nel caso decimale:

$213_{10} / 10 = 21.3_{10}$

$213_{10} = (2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0) / 10^1 =$

$(2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0) \times 10^{-1} =$

$(2 \times 10^2 \times 10^{-1} + 1 \times 10^1 \times 10^{-1} + 3 \times 10^0 \times 10^{-1}) =$

$(2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1}) = 21.3$ cvd.

$213_{10} \times 10 = 2130_{10}$

$213_{10} = (2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0) \times 10^1 =$

$(2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0) \times 10 =$

$(2 \times 10^2 \times 10^1 + 1 \times 10^1 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \times 10^1) =$

$(2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1) = 2130$ cvd.

Moltiplicazione mediante shift

Lo shift di un numero a dx, di k cifre, corrisponde ad una divisione per la base elevata alla k-esima potenza.
Lo shift di un numero a sx, di k cifre, corrisponde ad una moltiplicazione per la base elevata alla k-esima potenza.

Esempio nel caso binario:

23 * 4 = 92 => 10111 * 100 = 1011100

Esprimendo l'operazione in decimale:

$(1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0) \times 2^2 =$

$(1x2^6 + 0x2^5 + 1x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2) = 64 + 16 + 8 + 4 = 92$ cvd.

23 / 4 = 5, 75 => 10111 / 100 = 101,11

Esprimendo l'operazione in decimale:

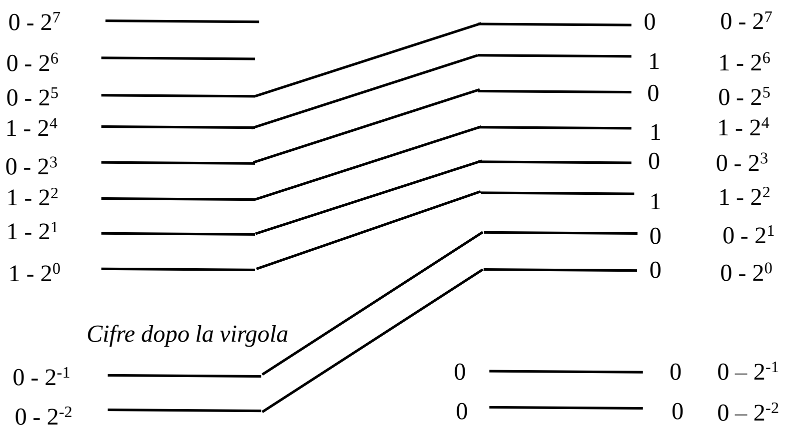
$(1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0) \times 2^{-2} =$

$(1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 1x2^{-1} + 1x2^{-2}) = 5{,}75$ cvd.

Moltiplicazione mediante shift

Codifica su 8 + 2 cifre:

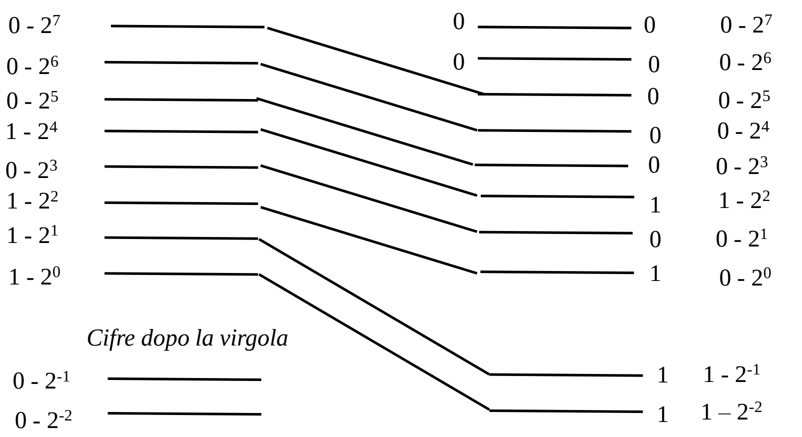
23 * 4 = 92 => 10111 * 100 = 1011100 $23_{10} = 00010111,00_2$



Divisione mediante shift

Codifica su 8 + 2 cifre:

23 / 4 = 5,75 => 10111 / 100 = 101,1100 $23_{10} = 00010111,00_2$



Moltiplicazione decimale

Moltiplicando ⟶ 2 7 8 x

Moltiplicatore ⟶ 4 2 3 =

----

8 3 4 +

Prodotti parziali ⟶ 5 5 6 -

1 1 1 2 - -

----

prodotto ⟶ 1 1 7 5 9 4

$278 \times 423 = 278 \times (4 \times 10^2 + 2\times10^1 + 3 \times10^0) =$

$278 \times (4 \times 10^2) + 278 \times (2 \times 10^1) + 278 \times (3 \times 10^0)$

Somma dei prodotti parziali

Moltiplicazione binaria - I

Moltiplicando ⟶ 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore ⟶ 1 1 1 =

----

1 1 0 1 1 x 27_{10}

1 1 1 = 7_{10}

----

1 1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 –

1 1 0 1 1 - -

----

1 0 1 1 1 1 0 1 189_{10}

1° prodotto parziale 1 1 0 1 1 +

Moltiplicazione binaria - II

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 1 1 =

----

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 -

----

prodotti parziali

1 1 0 1 1 x 27_{10}

1 1 1 = 7_{10}

----

1 1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 –

1 1 0 1 1 - -

----

1 0 1 1 1 1 0 1 189_{10}

Il secodo prodotto parziale è incolonnato alle potenze di 2^1 (la cifra del moltiplicatore ha peso 2^1)

Ho generato 2 addendi (2 prodotti parziali)
Provvedo subito alla loro somma

Moltiplicazione binaria - III

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 1 1 =

----

1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 -

----

2 prodotti parziali

1 1 0 1 1 x 27_{10}

1 1 1 = 7_{10}

----

1 1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 +

1 1 0 1 1 –

1 1 0 1 1 - -

----

1 0 1 1 1 1 0 1 189_{10}

1ª Somma parziale → 1 0 1 0 0 0 1 +

$P = P_0 + P_1 + P_2 = (P_0 + P_1) + P_2 =$
$= S_0 + P_2$

Moltiplicazione binaria - IV

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 1 1 =

```
1 1 0 1 1 x   27_10
    1 1 1 =    7_10
-------------------------
1 1 1 1 1 1
    1 1 0 1 1 +
  1 1 0 1 1 –
1 1 0 1 1 - -
-------------------------
1 0 1 1 1 1 0 1   189_10
```

```
---------------------
    1 1 1 1 1
      1 1 0 1 1 +
    1 1 0 1 1 -
-----------------------
  1 0 1 0 0 0 1 +
    1 1 0 1 1 - -
```

1ª Somma parziale → 1 0 1 0 0 0 1

prodotti parziali

Il terzo prodotto parziale è incolonnato alle potenze di 2^2 (la cifra del moltiplicatore ha peso 2^2)

Moltiplicazione binaria - V

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore → 1 1 1 =

```
1 1 0 1 1 x   27_10
    1 1 1 =    7_10
-------------------------
1 1 1 1 1 1
    1 1 0 1 1 +
  1 1 0 1 1 –
1 1 0 1 1 - -
-------------------------
1 0 1 1 1 1 0 1   189_10
```

```
---------------------
    1 1 1 1 1
      1 1 0 1 1 +
    1 1 0 1 1 -
-----------------------
  1 0 0 0 0
  1 0 1 0 0 0 1 +
  1 1 0 1 1 - -
-----------------------
1 0  1 1 1 1 0 1
```

1ª Somma parziale → 1 0 1 0 0 0 1

prodotti parziali

Somma finale = prodotto → 1 0 1 1 1 1 0 1

Moltiplicazione binaria - I

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x | 27 x

Moltiplicatore → 1 0 1 1 = | 11 =

---------------------- -----

1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 + | 27 +

1 1 0 1 1 - | 27- =

----------------------- -------

297

1 0 1 0 0 0 1

Prodotti parziali

Riporto

Somma parziale

Moltiplicazione binaria - II

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x | 27 x

Moltiplicatore → 1 0 1 1 = | 11 =

---------------------- -----

1 1 1 1 1

1 1 0 1 1 + | 27 +

1 1 0 1 1 - | 27- =

----------------------- -------

0 0 0 0 0 | 297

1 0 1 0 0 0 1 +

0 0 0 0 0 - -

----

1 0 1 0 0 0 1

Prodotti parziali

Riporto

Somma parziale

Moltiplicazione binaria - III

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x | 27 x

Moltiplicatore → 1 0 1 1 = | 11 =

```
        1 1 0 1 1 x      27 x
          1 0 1 1 =      11 =
----------------------   -----
    1 1 1 1 1
        1 1 0 1 1 +      27 +
      1 1 0 1 1 -       27- =
----------------------  -------
  0 0 0 0 0             297
    1 0 1 0 0 0 1 +
  0 0 0 0 0 - -
----------------------
1 1 0 1 0
    1 0 1 0 0 0 1 +
  1 1 0 1 1 - - - =
----------------------
1 0 0  1 0 1 0 0 1    -> 297|10
```

Prodotti parziali

Riporto

Somma parziale

Prodotto

Moltiplicazione: prodotti e somme

Moltiplicando → 1 1 0 1 1 x | 27 x

Moltiplicatore → 1 0 1 1 = | 11 =

```
        1 1 0 1 1 x      27 x
          1 0 1 1 =      11 =
----------------------   -----
    1 1 1 1 1 0
        1 1 0 1 1 +      27 +
      1 1 0 1 1 -       27- =
----------------------  -------
  0 0 0 0 0             297
    1 0 1 0 0 0 1 +
  0 0 0 0 0 - -
----------------------
1 1 0 1 0
    1 0 1 0 0 0 1 +
  1 1 0 1 1 - - - =
----------------------
1 0 0  1 0 1 0 0 1    -> 297|10
```

Prodotti parziali

Riporto

Somma parziale

Prodotto

$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = ((P_0+P_1) + P_2) + P_3 = (S_0 + P_2) + P_3 = S_1 + P_3$

Moltiplicazione binaria (su 4 bit)

Moltiplicando → 1 0 1 1 x 11_{10} x

Moltiplicatore → 1 0 1 = 5_{10} =

----

0 0 0 0

Prodotti parziali (AND) → 1 0 1 1 + $1011*1*2^0$ +

0 0 0 0 – $1011*0*2^1$ =

Somma parziale (Sommatori) → 1 0 1 1 +

1 0 1 1 - - $1011*1*2^2$ =

Prodotto → 1 1 0 1 1 1 55_{10}

Il prodotto parziale è = $\begin{cases} \text{Moltiplicando incolonnato opportunamente} \\ 0 \end{cases}$

La moltiplicazione binaria

Possiamo vederla come:

Un primo stadio in cui si mette in AND ciascun bit del moltiplicatore con il moltiplicando.

Un secondo stadio in cui si effettuano le somme (full adder) dei bit sulle righe contenenti i prodotti parziali.

La matrice dei prodotti parziali

A e B su 4 bit

Prodotti parziali

			a_3	a_2	a_1	a_0	
			$a_3 b_0$	$a_2 b_0$	$a_1 b_0$	$a_0 b_0$	b_0
		$a_3 b_1$	$a_2 b_1$	$a_1 b_1$	$a_0 b_1$		b_1
	$a_3 b_2$	$a_2 b_2$	$a_1 b_2$	$a_0 b_2$			b_2
$a_3 b_3$	$a_2 b_3$	$a_1 b_3$	$a_0 b_3$				b_3
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	

In binario i prodotti parziali sono degli AND.

Sulla linea tanti AND quanto è la lunghezza di A
Tanti prodotti parziali quanto è la lunghezza di B

La matrice dei prodotti parziali

Prodotti parziali

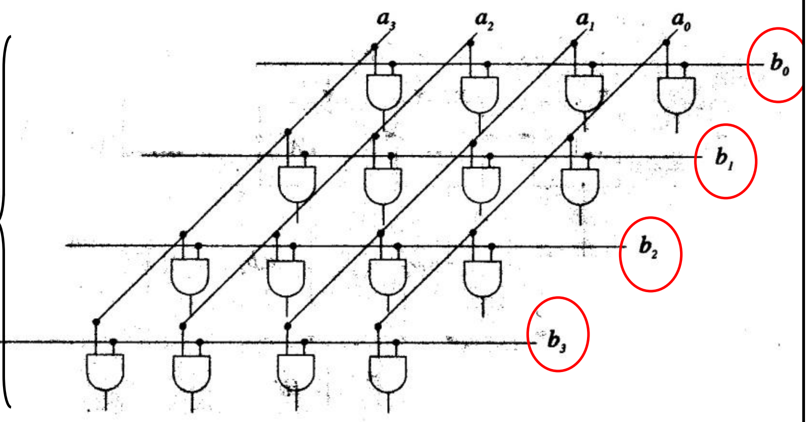
			a_3	a_2	a_1	a_0	
			$a_3 b_0$	$a_2 b_0$	$a_1 b_0$	$a_0 b_0$	b_0
		$a_3 b_1$	$a_2 b_1$	$a_1 b_1$	$a_0 b_1$		b_1
	$a_3 b_2$	$a_2 b_2$	$a_1 b_2$	$a_0 b_2$			b_2
$a_3 b_3$	$a_2 b_3$	$a_1 b_3$	$a_0 b_3$				b_3

Il bit i-esimo del moltiplicatore, b_i, fa passare 0 o il moltiplicando (prodotto parziale)
Il prodotto parziale viene incolonnato opportunamente.

b_0 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_0
b_1 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_1
b_2 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_2
b_3 (a_3 a_2 a_1 a_0) genera P_3
....

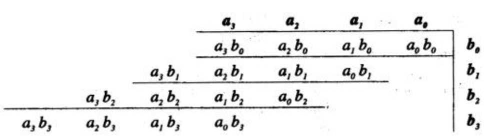
Il circuito che effettua i prodotti

Prodotti parziali

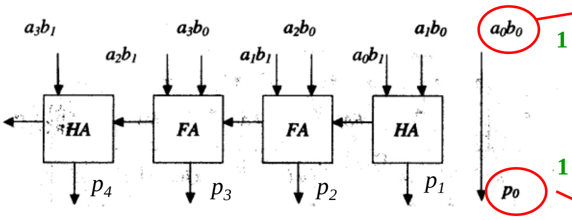


b_k agisce come interruttore, facendo passare 0 o A

Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - I



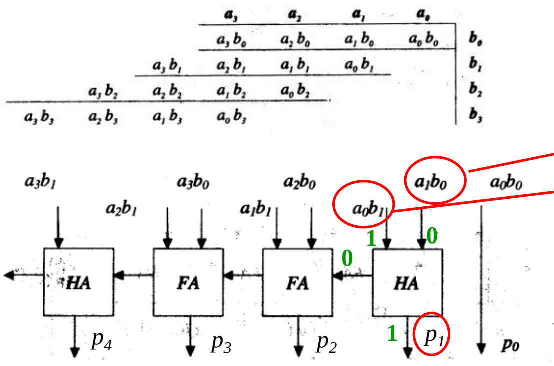
			a_3	a_2	a_1	a_0	
			a_3b_0	a_2b_0	a_1b_0	a_0b_0	b_0
		a_3b_1	a_2b_1	a_1b_1	a_0b_1		b_1
	a_3b_2	a_2b_2	a_1b_2	a_0b_2			b_2
a_3b_3	a_2b_3	a_1b_3	a_0b_3				b_3



Somma dei primi 2 prodotti parziali

1 1 0 1 x   13 x
1 0 1 1 =   11 =
----
1 1 0 0
1 1 0 1 +
1 1 0 1 -
----
0 0 0 0
1 0 0 1 1 1 +
0 0 0 0 - -
----
1 1 0 0
1 0 0 1 1 1 +
1 1 0 1 - - - =
----
1 0 0 0 1 1 1 1 -> $143|_{10}$

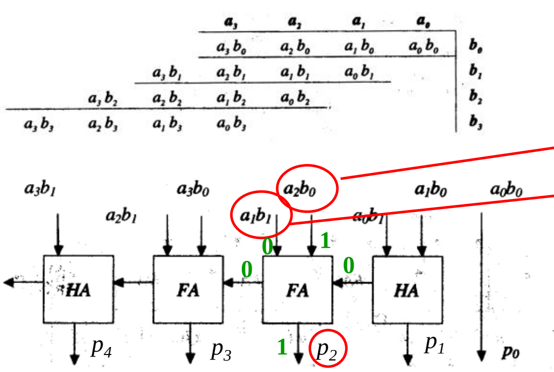
Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - II



1 1 0 1 x 13 x
1 0 1 1 = 11 =
----
1 1 0 0 0
1 1 0 1 +
1 1 0 1 -
----
0 0 0 0
1 0 0 1 1 1 +
0 0 0 0 - -
----
1 1 0 0
1 0 0 1 1 1 +
1 1 0 1 - - - =
----
1 0 0 0 1 1 1 1 -> $143|_{10}$

Somma dei primi 2 prodotti parziali →
1a somma parziale

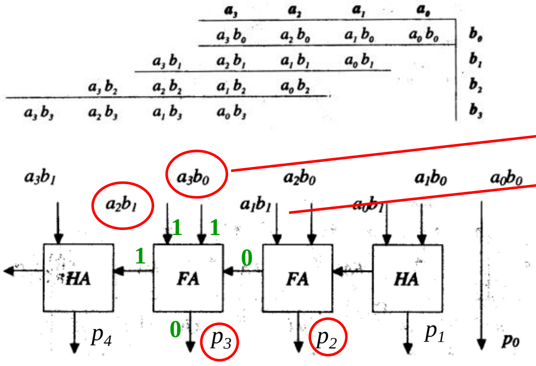
Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - III



1 1 0 1 x 13 x
1 0 1 1 = 11 =
----
1 1 0 0 0
1 1 0 1 +
1 1 0 1 -
----
0 0 0 0
1 0 0 1 1 1 +
0 0 0 0 - -
----
1 1 0 0
1 0 0 1 1 1 +
1 1 0 1 - - - =
----
1 0 0 0 1 1 1 1 -> $143|_{10}$

Somma dei primi 2 prodotti parziali →
1a somma parziale

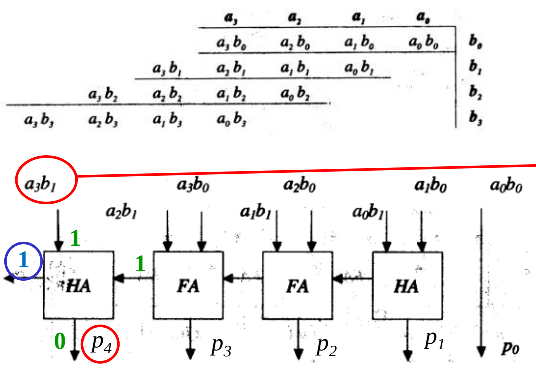
Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - IV




```
1 1 0 1 x      13 x
1 0 1 1 =      11 =
----------------------
    1 1 0 0 0
      1 1 0 1 +
    1 1 0 1 -
----------------------
  0 0 0 0
    1 0 0 1 1 1 +
    0 0 0 0 - -
----------------------
 1 1 0 0 0
    1 0 0 1 1 1 +
  1 1 0 1 - - - =
----------------------
 1 0 0 0 1 1 1 1   -> 143|10
```

Somma dei primi 2 prodotti parziali →
1a somma parziale

Somma delle prime 2 righe dei prodotti parziali - V




```
1 1 0 1 x      13 x
1 0 1 1 =      11 =
----------------------
    1 1 0 0 0
      1 1 0 1 +
    1 1 0 1 -
----------------------
  0 0 0 0
    1 0 0 1 1 1 +
    0 0 0 0 - -
----------------------
 1 1 0 0
    1 0 0 1 1 1 +
  1 1 0 1 - - - =
----------------------
 1 0 0 0 1 1 1 1   -> 143|10
```

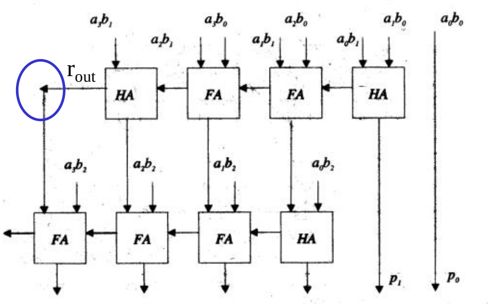
Somma dei primi 2 prodotti parziali →
1a somma parziale

Dove va il riporto in uscita all'ultimo FA?

Somma della terza riga

I primi due prodotti parziali sono ottenuti dalla prima batteria di sommatori.

Ogni altro prodotto parziale è sommato da un'ulteriore batteria di sommatori.




```
    1 1 0 1 x        13 x
    1 0 1 1 =        11 =
----------------------
    1 1 0 0 0
      1 1 0 1 +
    1 1 0 1 -
----------------------
  0 0 0 0 0
    1 0 0 1 1 1 +
    0 0 0 0 - -
----------------------
1 1 0 0
    1 0 0 1 1 1 +
  1 1 0 1 - - - =
----------------------
1 0 0 0 1 1 1 1    -> 143|10
```

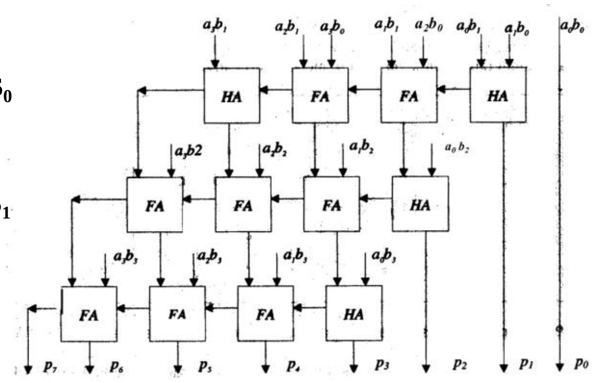

Circuito completo della somma dei prodotti parziali

N-1 batterie di sommatori

$P_0+P_1 \rightarrow S_0$

$S_0+P_2 \rightarrow S_1$

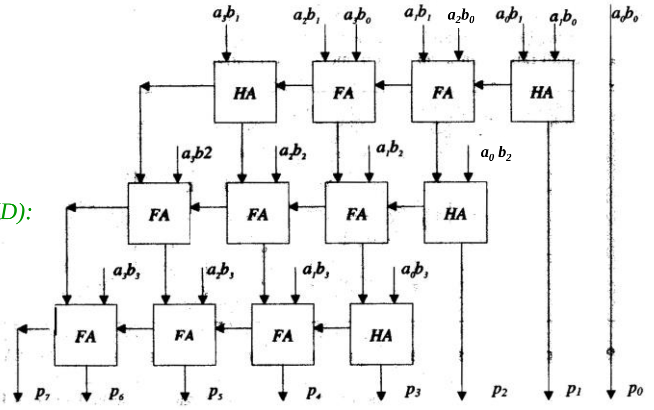
$S_1+P_3 \rightarrow P$



Problema: A e B su 4 bit => P su 8 bit (prodotto su 2N bit)

Valutazione della complessità

Complessità:
Half Adder: 2 porte
Full Adder: 5 porte



Stadio prodotti (AND):

A su N bit
B su M bit

N * M porte AND

Stadio Somme:

N sommatori per linea
M-1 linee

Se N = M = 4 numero totale di porte a 2 ingressi = 55

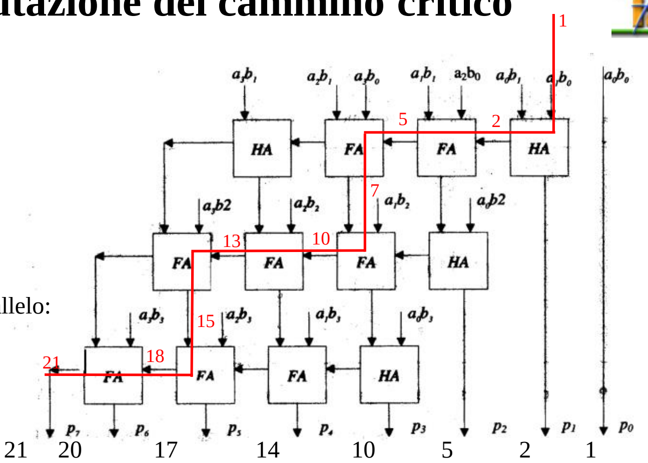
	Numero linee		Numero FA per linea	Numero HA per linea	Primo HA 1a linea		Prodotti Parziali
CO_{Tot} =	(M-1)	*	[(N-1) * 5 +	1 * 2]	- 2	+	M * N

Valutazione del cammino critico

Cammini critici:
Half Adder:
Somma – 1 porta
Riporto – 1 porta
Full Adder:
Somma - 2 porte
Riporto - 3 porte

Gli AND operano in parallelo:
ritardo 1.

HA e FA non sono equivalenti per il cammino critico



Se N = M = 4 cammino critico totale = 21

$$CC_{Tot} = 8 + (M-4)*(2+3) + 12 + 1$$

Osservazioni

Cammini critici:

Half Adder:

Somma – 1 porta

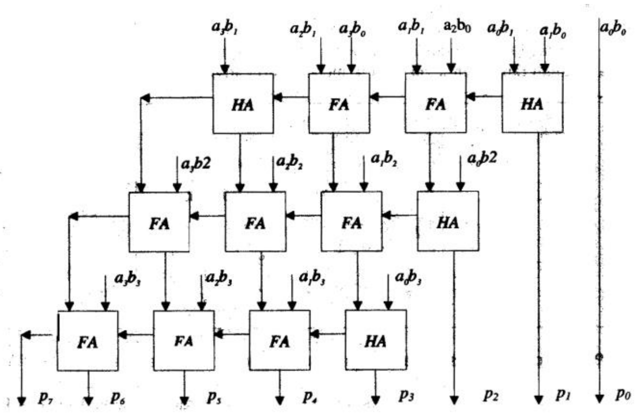
Riporto – 1 porta

Full Adder:

Somma - 2 porte

Riporto - 3 porte

Gli AND operano in parallelo: ritardo 1.



Architettura modulare, ogni schiera di sommatori lavora sul risultato della schiera superiore e fornisce l'input alla schiera inferiore

Quanto si guadagna sostituendo ai sommatori a propagazione di riporto sommatori ad anticipazione di riporto?

Sommario

Moltiplicatori

ALU

Funzione della ALU

E' integrata nel processore, all'inizio degli anni 90 è stata rivoluzionaria la sua introduzione con il nome di co-processore matematico.

Esegue le operazioni aritmetico-logiche.

E' costituita da circuiti combinatori. Utilizza i blocchi di base già visti.

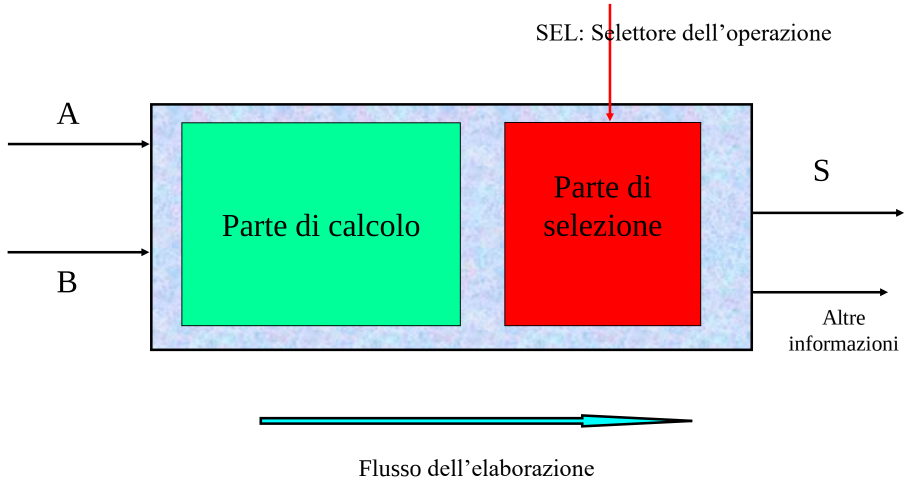
Opera su parole (MIPS 32 bit).

Le ALU non compaiono solamente nei micro-processori.

Problematiche di progetto

- Velocità (Riporto).
- Costo.
- Precisione.
- Affidabilità
- Consumo energetico.

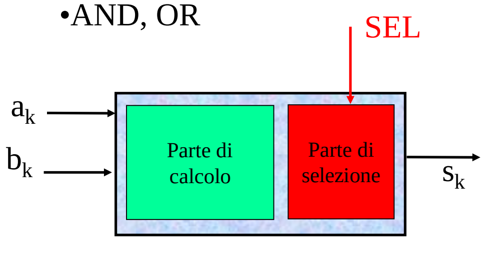
Struttura a 2 livelli di una ALU



Esempio di esecuzione condizionata.

Progettazione della ALU – 1 bit

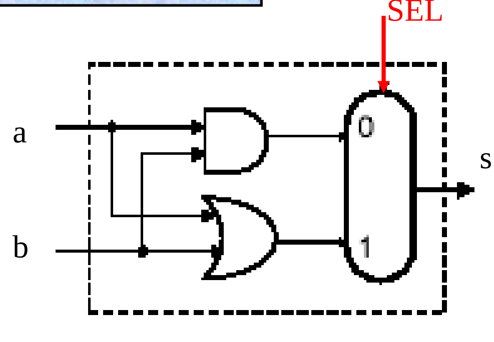
•AND, OR



a b	a *AND* b	a *OR* b
0 0	0	0
0 1	0	1
1 0	0	1
1 1	1	1

SEL = 0
s = AND(a,b)

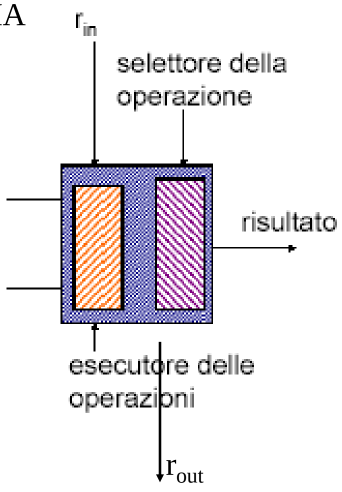
SEL= 1
s = OR(a,b)

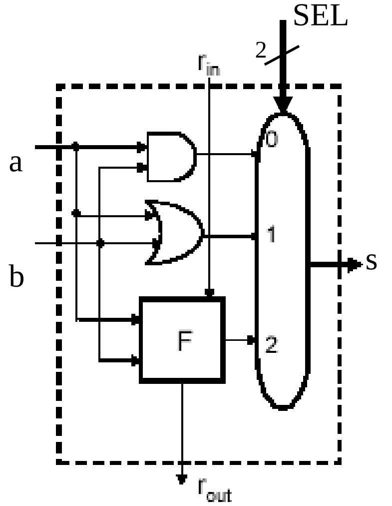


1 porta AND
1 porta OR
1 Mux

La nuova struttura della ALU – 1 bit

- AND
- OR
- SOMMA

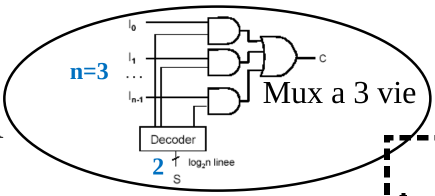


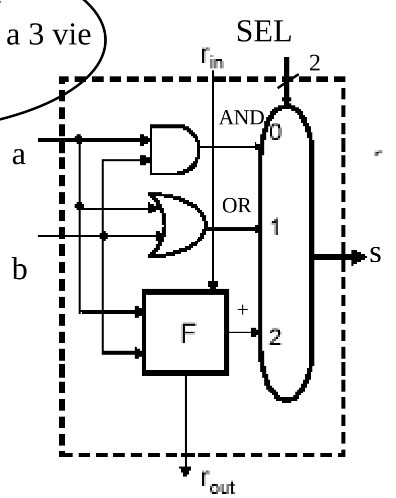


Perchè SEL non viene messo in ingresso?

Valutazione ALU a 1 bit

- AND
- OR
- SOMMA



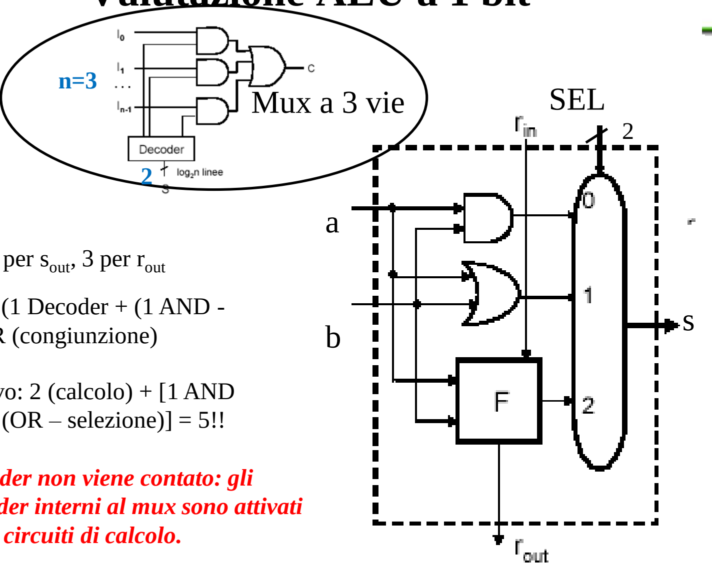


Complessità 1° livello (calcolo): 5+2 = 7
Complessità 2° livello (mux): 3*1+(3+2) = 8
(Decoder + AND (semaforo) + OR (congiunzione)

Complessità totale: 7+8 = 15

Valutazione ALU a 1 bit

- AND
- OR
- SOMMA



CC 1° livello: 2 per s_{out}, 3 per r_{out}

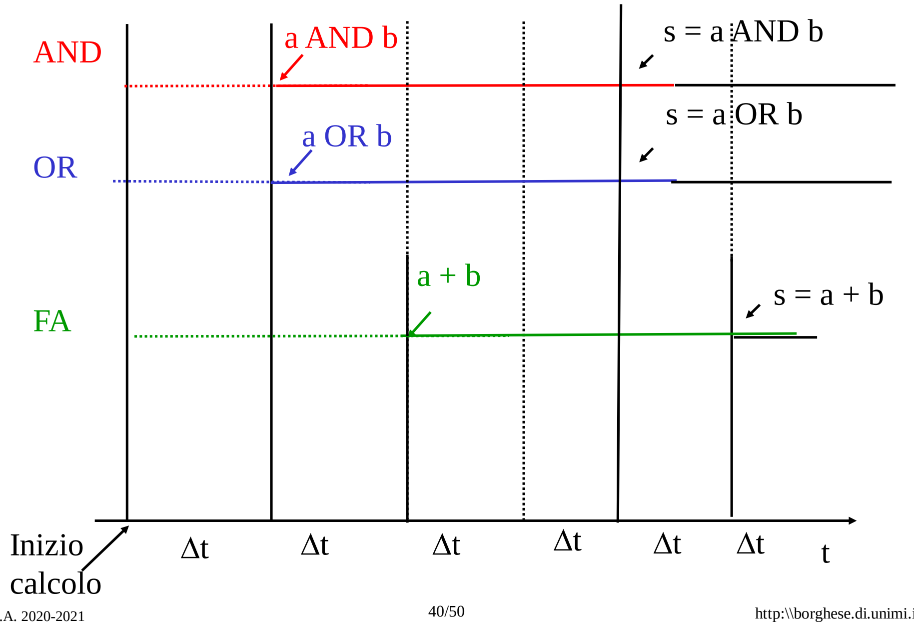
CC 2° livello: 4 (1 Decoder + (1 AND - semaforo + 2 OR (congiunzione)

CC complessivo: 2 (calcolo) + [1 AND (semaforo)+ 2 (OR – selezione)] = 5!!

Il CC del decoder non viene contato: gli AND del decoder interni al mux sono attivati in parallelo ai circuiti di calcolo.

Il CC considerato è quello della somma per valutare il tempo necessario perchè commuti s.

I cammini critici all'interno della ALU

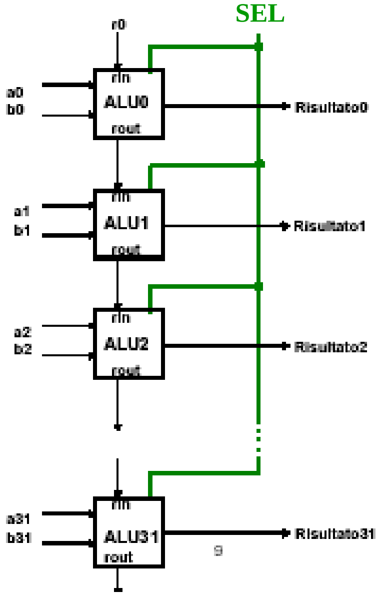


ALU a 32 bit

Come collegare le
ALU ad 1 bit?

Flusso di calcolo

Perchè non si può
parallelizzare?

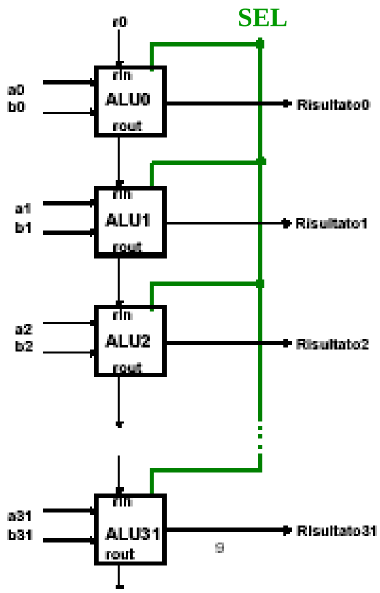


Valutazione ALU a 32 bit

Complessità: 15 x 32 = 480 porte logiche

Cammino critico: 3 x 31 (propagazione riporti) + 3 (semaforo + OR uscita mux di s_{31}) = 96 porte logiche

per 4 operazioni su 32 bit



Sottrazione

In complemento a 2 diventa un'addizione: $a - b = a + \bar{b} + 1 = 1 + a + \bar{b}$

Esempio: s = 3 – 4; su 3 bit

3 -> 011	011 +
-4 -> 100 in complemento a 2	100 =
-1 -> 111 in complemento a 2	111

Posso scrivere il numero negativo in complemento a 2 come somma:

	4 -> 100	numero positivo:	b
Passo I – Complemento a 1	011+	complemento a 1:	$\bar{b}$+
Passo II – Sommo + 1	1=	sommo 1:	1=
Risultato – Complemento a 2	100	risultato	-b

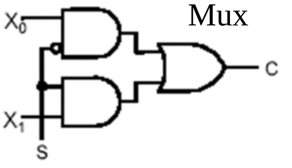
Posso quindi scrivere: $-b = \bar{b} + 1$

Sottrazione

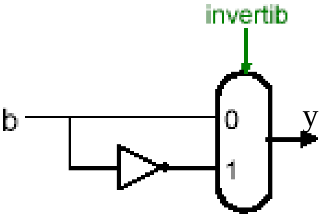
In complemento a 2 diventa un'addizione: $a - b = a + \bar{b} + 1$

Serve:
a) un inverter (NOT).
b) la costante 1

Mux



a)



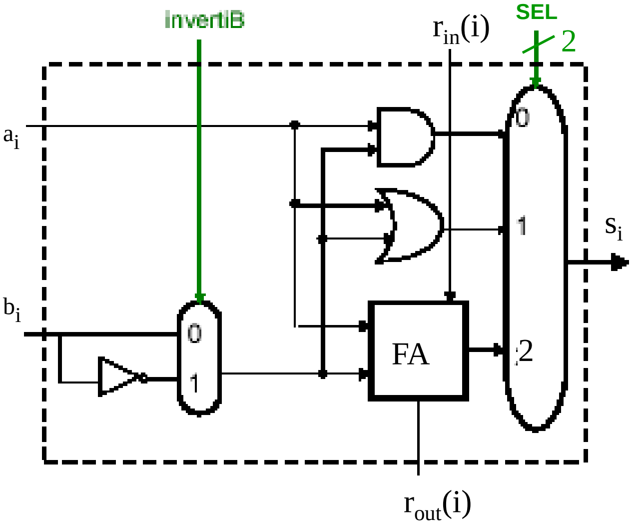
Iff invertib
y = !b

Aggiunge 2 porte logiche al cammino critico di ogni stadio.
Aggiungere 2 porte per ogni stadio.

b) Da dove prendo la costante 1?

Sottrazione - ALU_i

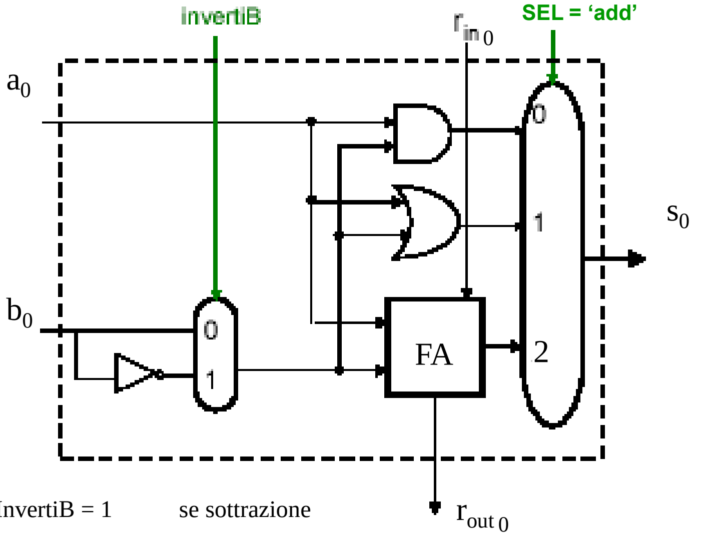
- AND
- OR
- SOMMA
- SOTTRAZIONE



$r_{in}(i) = r_{out}(i-1)$ i = 1,2,3,....31   i ≠ 0 (tranne che nel primo stadio)

InvertiB = 1   se sottrazione

Sottrazione – primo stadio: ALU_0



$r_{in}(0)$ = InvertiB = 1   se sottrazione

(occorre utilizzare un full adder anche per il bit meno significativo con $r_{in0} = 1$).
Effettuo quindi la somma di 1 con la somma della prima coppia di bit.

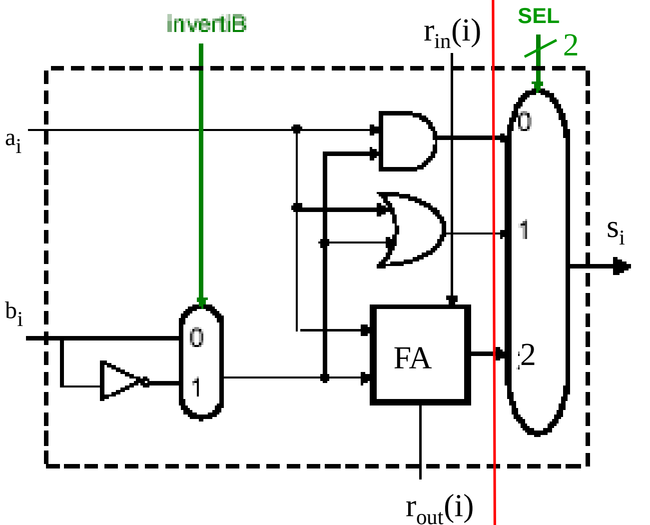
Operazioni particolari - ALU$_i$

E' possibile programmare questa ALU per eseguire

a AND !b

oppure:

a OR !b



InvertiB = 1
SEL = AND, OR

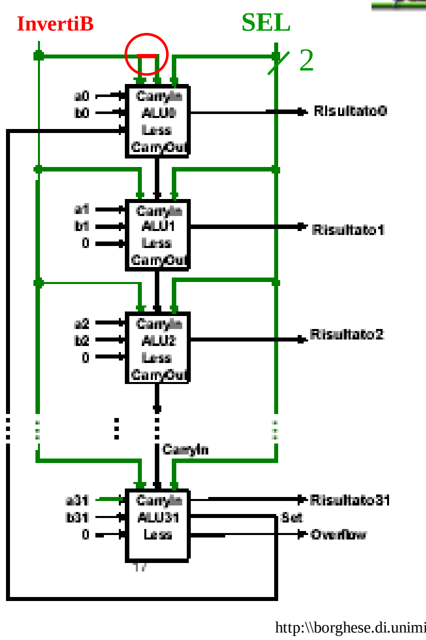
La parte di calcolo è comunque separata dalla parte di selezione

Sottrazione: ALU a 32 bit

$r_{in}(0)$ = InvertiB = 1
se sottrazione

- AND
- OR
- SOMMA
- SOTTRAZIONE

From_UC	SEL	r_0	InvertiB
And	And	0	0
Or	Or	0	0
Somma	Add	0	0
Sottr.	Add	1	1



InvertiB e r_0 sono lo stesso segnale, si può ancora ottimizzare.

$r_{in}(0)$ entra solo in ALU$_0$

InvertiB entra in tutte le ALU$_i$

ALU a 32 bit con CLA

- Come realizzare una ALU a 32 bit con:
  - Porte OR
  - Porte AND
  - CLA a 4 bit?

Definire complessità e cammino critico

Notate che l'inverter su b aggiunge complessità e cammino critico.

Sommario

Moltiplicatori

ALU