


I circuiti logici: definizione delle funzioni logiche

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
borghese@di.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti al testo: Appendice B, sezioni B.1 e B.2


Sommario

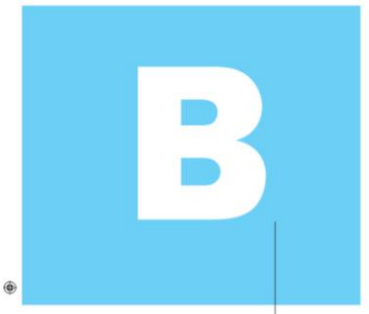
Variabili ed operatori semplici.

Implementazione circuitale (porte logiche).

Dal circuito alla funzione.

Algebra Booleana.

Le appendici del Patterson sono on-line…



http://online.universita.zanichelli.it/patterson-4e/xstudx-appendici/

A P P E N D I X

The Basics of Logic Design

I always loved that word, Boolean.

Claude Shannon
IEEE Spectrum, April 1992
(Shannon's master's thesis showed that the algebra invented by George

Le operazioni logiche fondamentali

NOT

AND

OR

QUALUNQUE funzione booleana (logica) può essere espressa combinando opportunamente tre funzioni booleane elementari.

Si dice anche che AND, OR, NOT formano un set completo.

Circuiti Booleani

"An Investigation of the Laws of Thought on Which to Found the Mathematical Theories of Logic and Probabilities" G. Boole, 1854: approccio alla logica come algebra.

Variabili (binarie, 0 = FALSE; 1 = TRUE).

Operazioni sulle variabili (NOT, AND, OR).

Equivalenza tra operazioni logiche su proposizioni vere/false e operazioni algebriche su variabili binarie.

Utilizzo dell'algebra Booleana per:

- Progettazione (sintesi) dei circuiti digitali. Data una certa funzione logica, sviluppare il circuito digitale che la implementa (implementeremo anche le operazioni aritmetiche come funzioni logiche!).
- Analisi dei circuiti. Descrizione della funzione logica implementata dai circuiti.
- Semplificazione di espressioni logiche per ottenere implementazioni efficienti.

Rappresentazione delle funzioni logiche

	A	B	C	Y
0	F=0	F=0	F=0	F=0
1	F=0	F=0	V=1	V=1
2	F=0	V=1	F=0	F=0
3	F=0	V=1	V=1	F=0
4	V=1	F=0	F=0	F=0
5	V=1	F=0	V=1	V=1
6	V=1	V=1	F=0	V=1
7	V=1	V=1	V=1	V=1

(A,B,C) → Y

Input (dominio) Output (codominio)

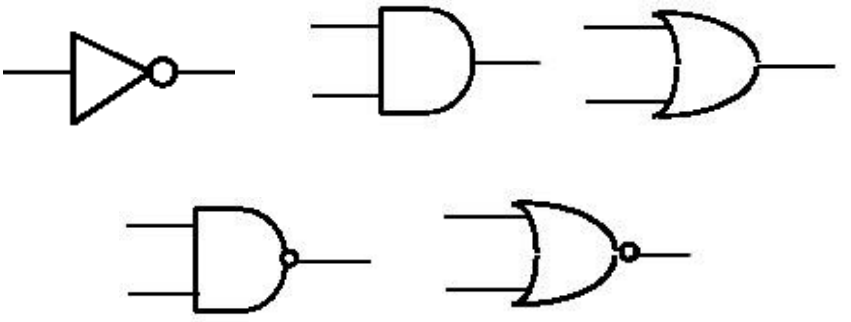
Tabella della verità (truth table – TT)

Vengono considerate tutte le combinazioni possibili in input, terna A,B,C, dove ciascuna variabile può assumere i valori (V,F). Le combinazioni in ingresso si possono indicizzare con i numeri interi (0,1,2, 3, 4, 5, 6, 7).

Per ogni combinazione in input viene prescritto l'output, Y, desiderato (V,F).

Porte logiche

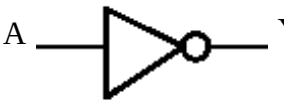
Gli operatori logici vengono implementati da dei circuiti elettronici che sono chiamati porte logiche



Operatore NOT

Tabella della verità

A	Y
0	1
1	0



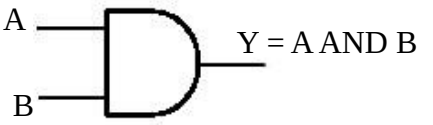
"Inverter logico" : se **A** *è vero (A =* ***TRUE****=1),*
NOT **A** *è falso (****FALSE****=0)*
e viceversa.

Scrittura algebrica: ***NOT*** **A** = $\overline{\mathbf{A}}$ **= !A**

Operatore AND

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabella della verità



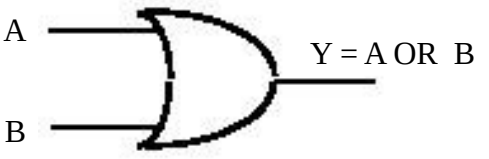
*Esempio: "Se c'è il sole **e** c'è Michela (Michele) vado a sciare"*

Scrittura algebrica: Y = A ***AND*** B = A · B = AB

Operatore OR

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabella della verità



*Esempio: "Se c'è il sole **o** c'è Michela (Michele) vado a sciare"*

Scrittura algebrica: Y = A ***OR*** B = A + B

Somma e prodotto logico

Somma logica

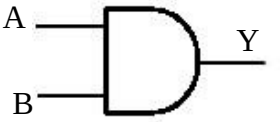
=> OR

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

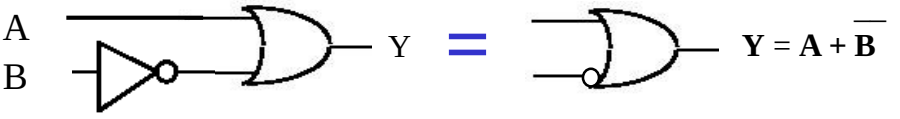
Prodotto logico

=> AND

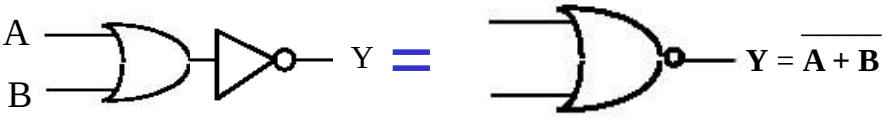
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Concatenazione del NOT



Inserire un cerchietto all'ingresso corrisponde a negare (complementare) quell'ingresso.

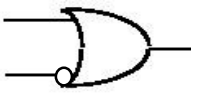


Inserire un cerchietto all'uscita corrisponde a negare (complementare) l'uscita.

Tabella della verità

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$Y = OR(A,\overline{B})$



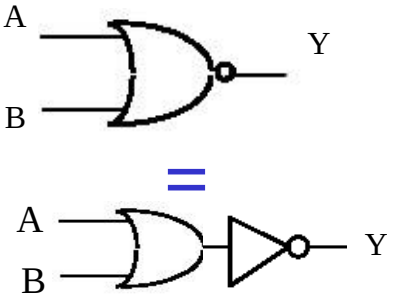
$\mathbf{Y = A + \overline{B}}$

Questa funzione è diversa dalla funzione OR(A,B)
La tabella della verità è diversa.

Operatore NOR

A	B	OR(A,B)	Y
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Operatore OR negato



"Not(Or(A,B))"

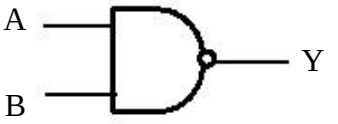
$\mathbf{Y = \overline{A + B}}$

Operatore NAND

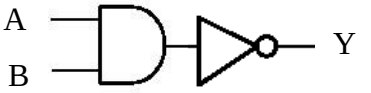
A	B	AND(A,B)	Y
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

"Not(And(A,B))"

Operatore AND negato



=



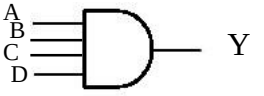
$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$

Porte logiche a più ingressi

- Rappresentano circuiti che forniscono in uscita il risultato di operazioni logiche elementari sui valori di tutte le variabili in ingresso
- Le variabili in ingesso possono essere n.

Ad esempio:

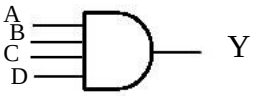
Y = A AND B AND C AND D



Porte logiche: tabella della verità

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Y = A AND B AND C AND D



Sommario

Variabili ed operatori semplici.

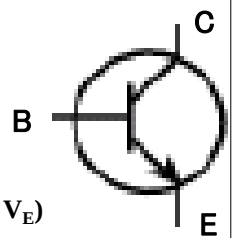
Implementazione circuitale (porte logiche).

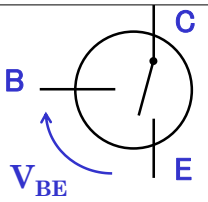
Dal circuito alla funzione.

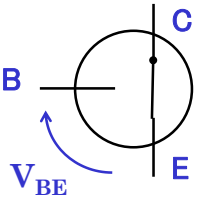
Algebra Booleana.

Il Transistor

- Modello: interruttore tra **Emettitore** e **Collettore**, comandato dalla tensione sulla **Base.**
- 2 casi "estremi":
  - Tensione **V_{BE} bassa → C,E isolati (spento)**
    - Transistor in stato di **INTERDIZIONE**
  - Tensione **V_{BE} alta → C,E collegati (acceso)**
    - Transistor in stato di **SATURAZIONE ($V_C = V_E$)**







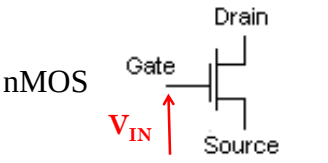
La tecnologia CMOS: dal 1980 a oggi

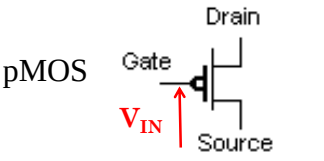
- CMOS: Complementary–MOS (Frank Wanlass, 1967 Fairchild)
  - MOS: Metal – Oxide Semiconductor
  - MOS complementari (N-MOS + P-MOS) che lavorano "in coppia": substrati comuni.

Acceso se: $\mathbf{V_{in} > V_{dd}/2}$

nMOS è acceso se: V_{GS} > soglia
$V_G \approx V_{dd}$

pMOS è acceso se: V_{DG} > soglia
$V_G \approx V_{ss}$





Un MOS:
- Quando è acceso funziona da corto circuito tra DS
- Quando è spento funziona da circuito aperto tra DS

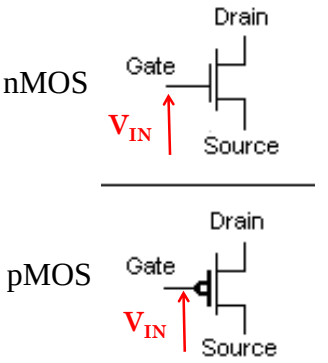
Acceso se: $\mathbf{V_{in} < V_{dd}/2}$

La tecnologia CMOS: vantaggi

- Vantaggi:
  - Tensione di alimentazione "flessibile":
    V_{CC} = 1 ÷ 15 Volt (vicina a 1 V quasi sempre)
    V_{LOW} = 0 ≈ V_{ss} (tensione di source)
    V_{HIGH} = 1 ≈ V_{dd} (tensione di drain)
  - Consumo bassissimo:
    - Consuma solo nella transizione
    - In condizioni statiche, consumo praticamente nullo!

Si può vedere come un ponte levatorio che si alza e si abbassa tra Drain e Source ed è pilotato dal gate. Si consuma energia solo quando viene alzato o abbassato.

Acceso se: $V_{in} > V_{dd}/2$



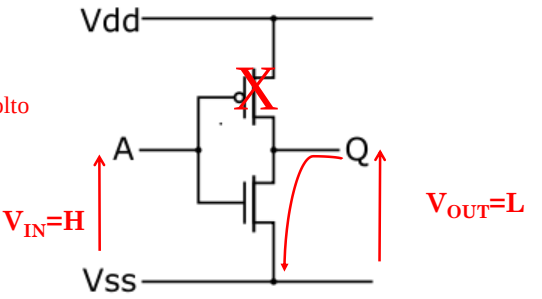
Acceso se: $V_{in} < V_{dd}/2$

La porta NOT in CMOS

NOT

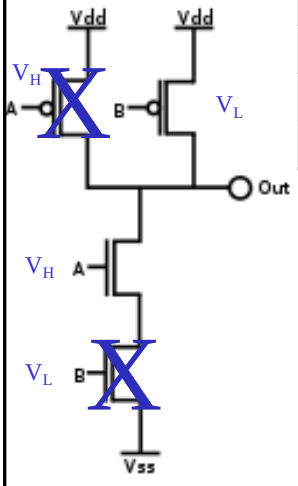
V_{in} = L = 0V il transistor inferiore è spento, V_{out} = V_{dd} = H

V_{in} = H = V_{dd} passa corrente nel transistor inferiore, la resistenza è molto bassa e V_{out} ≅ 0 = L.

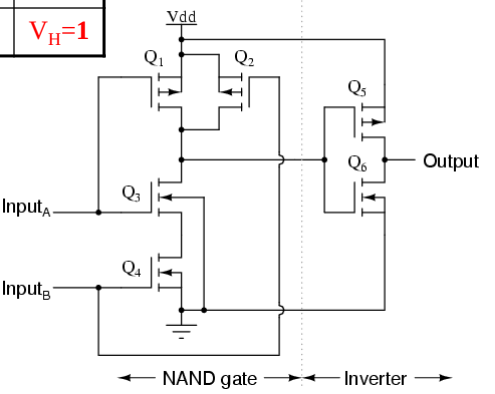


Porta NAND e AND in C-MOS

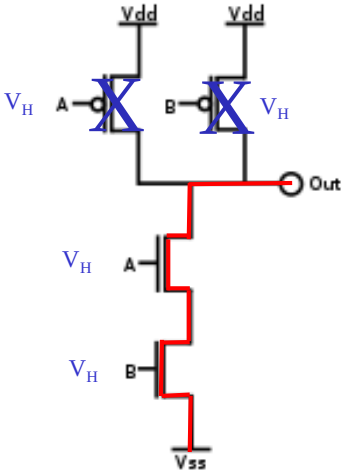
V_A	V_B	V_{OUT}
V_H=1	V_H=1	V_L=0
V_H=1	V_L=0	V_H=1
V_L=0	V_H=1	V_H=1
V_L=0	V_L=0	V_H=1



CMOS AND gate



Porta NAND in C-MOS all'opera



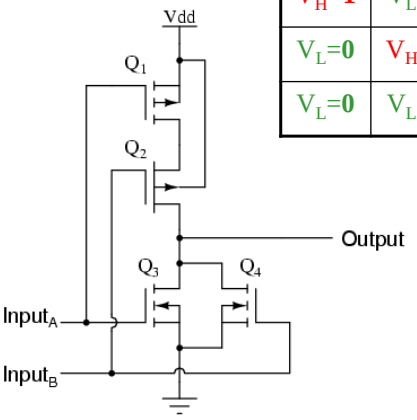
V_1	V_2	V_{OUT}
V_H=1	V_H=1	V_L=0
V_H=1	V_L=0	V_H=1
V_L=0	V_H=1	V_H=1
V_L=0	V_L=0	V_H=1

$V_A = 1; V_B = 1 \rightarrow V_{out} = V_{ss} = 0$

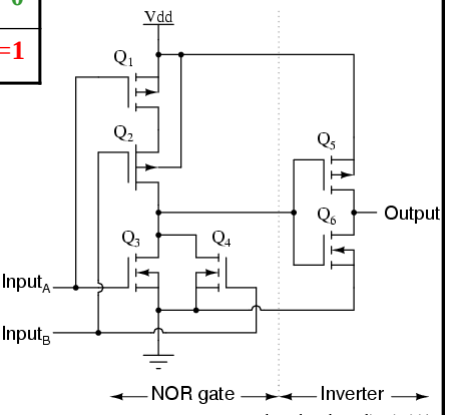
PORTA NOR e OR IN CMOS

V_1	V_2	V_{OUT}
V_H=1	V_H=1	V_L=0
V_H=1	V_L=0	V_L=0
V_L=0	V_H=1	V_L=0
V_L=0	V_L=0	V_H=1

CMOS NOR gate



CMOS OR gate

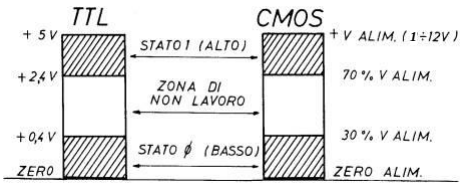


NOR gate — Inverter

Perchè l'elettronica digitale funziona?

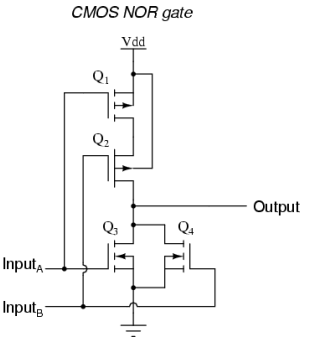
Perchè è progettata per essere resistente al rumore.

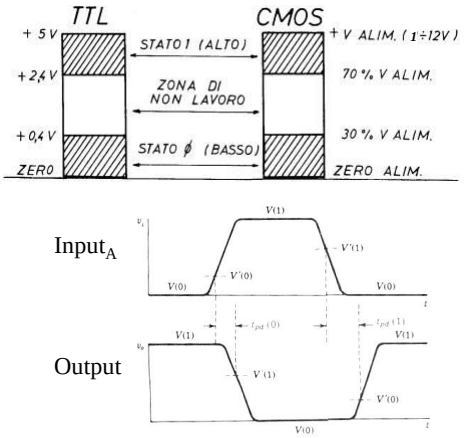
Vengono definiti 2 range di tensioni associati ai valori alto e basso, separati da un gap.



Tempo di commutazione

La commutazione non è istantanea





Più porte in cascata generano un ritardo nella commutazione dell'uscita.

Numero limitato di porte logiche che si possono collegare in ingresso e in uscita (fan-in / fan-out)

Sommario

Variabili ed operatori semplici.

Implementazione circuitale (porte logiche).

Dal circuito alla funzione.

Algebra Booleana.

Funzione

- Una relazione che associa ad ogni elemento dell'insieme X:{x}, detto dominio, associa un elemento dell'insieme Y: {y], detto codominio, indicandola con y = f(x) (Wikipedia). Sinonimi: mappa, trasformazione.

- Nulla è detto sulla forma di questa relazione.
  - Funzione analitica (e.g. Y = sin(x) log(cos(x/2))...
  - Funzione a più valori di input e più valori di output (x ed y vettori)
  - Tabella di corrispondenza (tabella di verità).
  - ....

Funzioni logiche

- Funzione a n ingressi e m uscite. Per ciascuna delle 2^n combinazioni degli ingressi, può essere calcolata ciascuna delle uscite.

- La funzione logica sarà costituita da un'opportuna combinazione di porte semplici (NOT, AND, OR) che prendono gli n ingressi e li trasformano nell'uscita specificata.

- La funzione logica sarà calcolata da un circuito con n ingressi, costituito da porte logiche.

- Il valore della funzione può essere rappresentato in 3 modi:

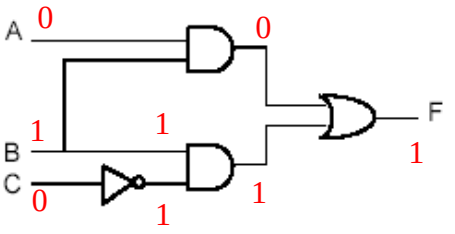
  Circuito

  Tabella della verità (Truth Table, TT).

  Espressione simbolica

Dal circuito alla TT

F = (A AND B) OR (B AND NOT(C))

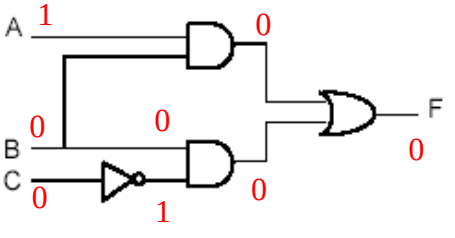


Direzione del calcolo

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Dal circuito alla TT - 2

F = (A AND B) OR (B AND NOT(C))



Direzione del calcolo

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

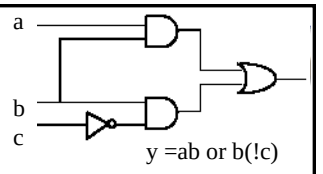
Dall'espressione logica alla TT

• Data l'espressione: F = (A AND B) OR (B AND NOT(C))

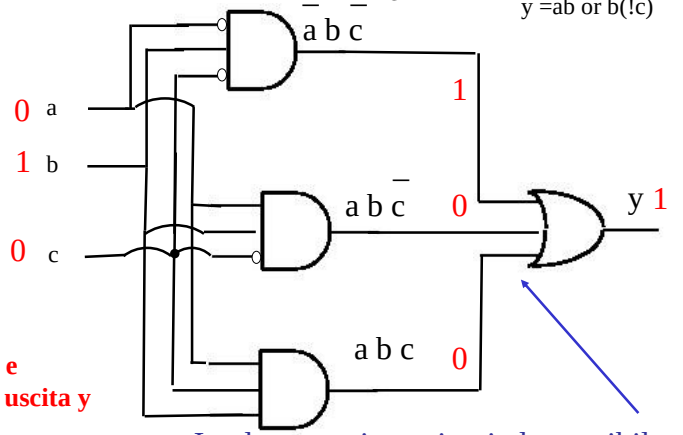
Ricaviamo la tabella delle verità:

A B C	A and B	B and not(C)	F
0 0 0	0	0	0
0 0 1	0	0	0
0 1 0	0	1	1
0 1 1	0	0	0
1 0 0	0	0	0
1 0 1	0	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	1

Circuiti equivalenti



a b c	y
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1



Espressioni algebriche e tabella danno la stessa uscita y

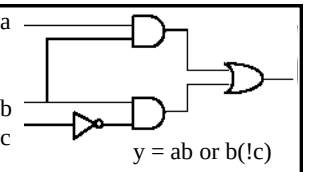
Espressioni algebriche (e circuiti diversi) possono implementare la stessa funzione logica (stessa TT)

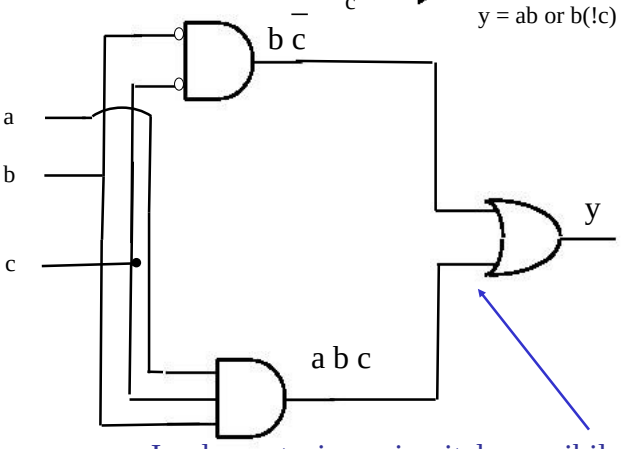
Implementazione circuitale possibile. Non è l'unica!

$$y = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,b\,\bar{c} + a\,b\,c$$

Circuiti equivalenti - 2

a b c	y
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1





Funzione e tabella danno la stessa uscita y.

Espressioni algebriche diverse e circuiti diversi possono implementare la stessa funzione logica (stessa TT).

Implementazione circuitale possibile.
Non è l'unica!

$y = a\,b\,c + \bar{b}\,\bar{c}$

Sommario

Variabili ed operatori semplici.

Implementazione circuitale (porte logiche).

Dal circuito alla funzione.

Algebra Booleana.

Concatenazione degli operatori - I

In assenza di parentesi, AND ha la priorità sull'OR ed il NOT su entrambi:

A + B · C = A + (B · C)

per eseguire prima OR occorre scrivere esplicitamente: (A+B) · C

In assenza di parentesi, la negazione ha la priorità sugli altri operatori.

NOT A · C = (NOT(A)) · C = $\bar{A}$C

$\overline{ABC}$ Eseguo prima la negazione. Quindi eseguo prima l'AND di A e B, nego il risultato dell'AND ed infine eseguo l'AND con C:

1) AB
2) !(AB)
3) (!AB) C)

Concatenazione degli operatori - II

$\bar{A}\,\bar{B}$ = ($\bar{A}$) (B)

1) Prima eseguo la negazione di A e la negazione di B in parallelo.
2) Poi eseguo l'AND.

$\bar{A}\,\bar{B}$ C = [($\bar{A}$) ($\bar{B}$)] C

1) Prima eseguo la negazione di A e la negazione di B in parallelo.
2) Eseguo il prodotto logico di !A, !B e C.

Anche sulle negazioni esiste una gerarchia:

$\overline{\bar{A}\,\bar{B}}$ = $\overline{(\bar{A})\,(\bar{B})}$ = ! ((!A) (!B))

1) Prima eseguo la negazione di A e la negazione di B in parallelo.
2) Eseguo poi l'AND di !A e !B = AND(!A, !B)
3) Nego il risultato dell'AND

Manipolazione algebrica - I

	AND	OR
Identità	$1\ x = x$	$0 + x = x$
Algebra classica	$1\ N = N$	$0 + N = N$
Elemento nullo	$0\ x = 0$	$1 + x = 1$
Algebra classica	$0\ N = 0$	----------

Uno degli ingressi della porta AND funge da interruttore:
= 0, uscita è sempre =0, interruttore aperto
= 1, uscita è uguale all'ingresso, interruttore chiuso.

Inverso	$\bar{x}\ x = 0$	$x + \bar{x} = 1$
Algebra classica	---------	----------
Idempotenza	$x\ x = x$	$x + x = x$
Algebra classica	----------	----------

Manipolazione algebrica - II

Doppia Inversione	$\bar{\bar{x}} = x$	
Algebra classica	----------	----------

	AND rispetto ad OR	OR rispetto ad AND
Associativa	$(x\ y)\ z = x\ (y\ z)$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Algebra classica	$(NM)K = N(MK)$	$(N+M)+K = N+(M+K)$
Commutativa	$x\ y = y\ x$	$x + y = y + x$
Algebra classica	$NM = MN$	$N + M = M + N$
Distributiva	$x\ (y + z) = x\ y + x\ z$	$x + y\ z = (x + y\ )\ (x + z)$
Algebra classica	$N(M+K) = NM+NK$	----------
Assorbimento	$x\ (x + y) = x$	$x + x\ y = x$
Algebra classica	----------	----------

Principio di dualità

Nell'algebra di Boole vale il principio di dualità.

Il duale di una funzione booleana si ottiene sostituendo AND ad OR, OR ad AND, gli 0 agli 1 e gli 1 agli 0.

Esempi:

• Identità	$1\ x = x$	$0 + x = x$
• Elemento nullo	$0\ x = 0$	$1 + x = 1$

Proprietà Commutativa:

$x\ y = y\ x$ $\qquad$ $x + y = y + x$

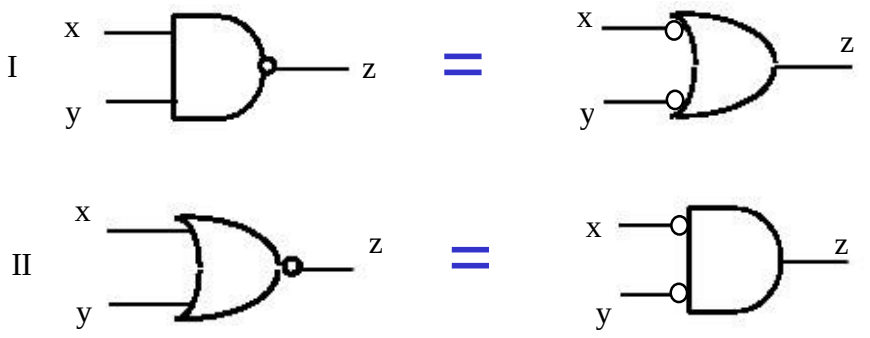
- **Proprietà distributiva:**

$x\ (y + z) = xy + xz$ $\qquad$ $x + (y\ z) = x + yz$

- **Assorbimento:** $x\ (x + y) = x$ $\qquad$ $x + x\ y = x$

Teoremi di De Morgan

Enunciati: $\qquad$ *I)* $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$ $\qquad$ *II)* $\overline{x + y} = \bar{x}\,\bar{y}$

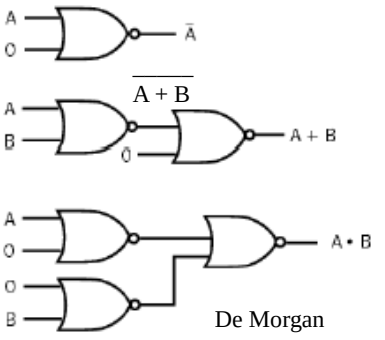


Regole algebriche

	AND	OR
Doppia Inversione	$\overline{\overline{x}} = x$	
Identità	$1\ x = x$	$0 + x = x$
Elemento nullo	$0\ x = 0$	$1 + x = 1$
Idempotenza	$x\ x = x$	$x + x = x$
Inverso	$x\ \overline{x} = 0$	$x + \overline{x} = 1$
Commutativa	$x\ y = y\ x$	$x + y = y + x$
Associativa	$(x\ y)\ z = x\ (y\ z)$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
	AND rispetto ad OR	**OR rispetto ad AND**
Distributiva	$x\ (y + z) = x\ y + x\ z$	$x + y\ z = (x + y\ )\ (x + z)$
Assorbimento	$x\ (x + y) = x$	$x + x\ y = x$
De Morgan	$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$	$\overline{x + y} = \overline{x}\ \overline{y}$

Porta Universale NOR

- NOT A = 0 NOR A
- A OR B = (A NOR B) NOR 0
- A AND B = (A NOR 0) NOR (B NOR 0)



NOT

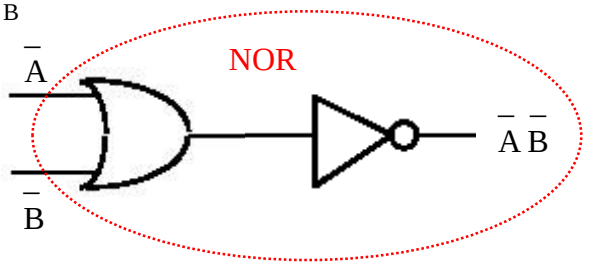
OR

AND

De Morgan

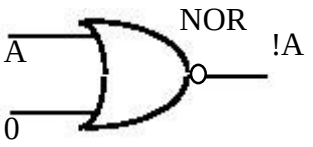
De Morgan NOR -> AND

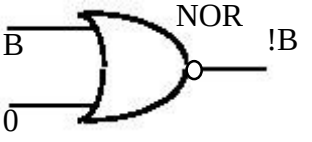
De Morgan: $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$



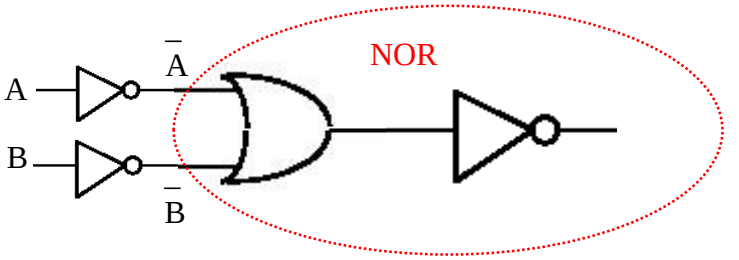
Questo circuito con NOR è equivalente a AND(!A,!B). Come faccio con le negazioni?

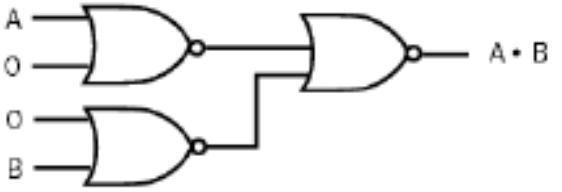
Applico la negazione agli ingressi:





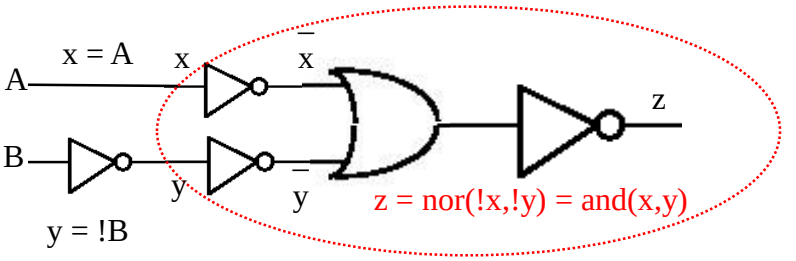
De Morgan NOR -> AND





De Morgan in generale

Quale funzione è implementata da questo circuito?



z = AND(x,y)
Sostituisco il not e ottengo: z = and(A,!B) = $A\,\bar{B}$

Esercizio

Data la funzione booleana:
F = (A AND B) OR (B AND NOT(C))

Esprimere la funzione F con il solo connettivo logico NOR e disegnare il circuito.

Esprimere la funzione F con il solo connettivo logico NAND e disegnare il circuito.

Costruire le porte logiche: AND, OR, NOT utilizzando solo la porta NAND.

Sommario

Variabili ed operatori semplici.

Implementazione circuitale (porte logiche).

Dal circuito alla funzione.

Algebra Booleana.