



Firmware Division

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
borgese@di.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti sul Patterson 5a ed.: 3.4, 3.5



Sommario

- **Divisione intera**
- Circuiti divisione intera
- Divisione e moltiplicazione



Moltiplicazione



128 x		
214 =	128x(4x10 ⁰)+	unità
-----	128x(1x10 ¹)+	decine
512 + 10 ⁰	128x(2x10 ²) =	centinaia
128- + 10 ¹	27392	
256-- = 10 ²		

27392		

Prodotto come somma dei prodotti parziali. Ognuno dei prodotti parziali aggiunge il moltiplicando pesato con il peso della cifra analizzata del moltiplicatore x un numero di volte pari alla cifra analizzata del moltiplicatore.

Nel caso binario le cifre sono solo 0,1 ==>



Algoritmi per la moltiplicazione



Il razionale degli algoritmi firmware della moltiplicazione è il seguente.

Moltiplicando	1 1 0 1 1 x
Moltiplicatore	1 0 1 =

Si analizzano sequenzialmente i bit del moltiplicatore e:

- 1) Si mette 0 nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore = 0).
- 2) Si mette una copia del moltiplicando nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore = 1).

	1 1 0 1 1 +
→	0 0 0 0 0 -

	1 1 0 1 1
→	1 1 0 1 1 - -

Prodotto	1 0 0 0 1 1 1

La moltiplicazione viene effettuata come somme successive, con peso crescente, di uno tra i 2 valori: {moltiplicando, 0}



La divisione decimale



Dividendo Divisore

$$\begin{array}{r} \text{---} \\ 2516 : 12 = 209 \\ 116 \\ 8 \end{array}$$

Quoziente

Resto

$$\text{Dividendo} = \text{Divisore} * \text{Quoziente (quoto)} + \text{Resto}$$



Razionale della divisione decimale



La divisione è l'operazione inversa del prodotto

$$2628 : 12 = 219 \quad (\text{resto} = 0) \quad \rightarrow \quad 219 \times 12 (+ \text{resto}) = 2628$$

$$[(2 \times 10^2) + (1 \times 10^1) + (9 \times 10^0)] \times 12 = 2628$$

Da cui segue che ad ogni passo della divisione erodiamo una quantità via via decrescente. Al primo passo:

$$[(1 \times 10^1) + (9 \times 10^0)] \times 12 = 2628 - (2 \times 10^2) \times 12 = 2628 - 2400 = 228$$

Abbiamo cioè eroso 24 centinaia.

Al passo successivo eroderemo in questo caso 12 decine:

$$[(9 \times 10^0)] \times 12 = 228 - (1 \times 10^1) \times 12 = 228 - 120 = 108$$

E al passo finale $12 \times 9 = 108$ unità.

$$\text{Resto} = 108 - (9 \times 10^0) \times 12 = 108 - 108 = 0$$

Quello che rimane è il resto, pari a 0.



La divisione decimale



$$\begin{array}{r}
 \text{----} \\
 2516 : 12 = 0209 \\
 12x0 = 0 = \\
 \text{----} \\
 25 - \\
 12x2 = 24 = \qquad \text{Erodiamo 2 centinaia di 12} \\
 \text{----} \\
 11 - \\
 12x0 = 0 = \qquad \text{Erodiamo 0 decine di 12} \\
 \text{-----} \\
 12x9 = 116 - \\
 108 = \qquad \text{Erodiamo 9 unità di 12} \\
 \text{-----} \\
 8 \quad \text{Resto}
 \end{array}$$

$$\text{Dividendo} = \text{Divisore} * \text{Quoziente (quoto)} + \text{Resto}$$



La divisione decimale::algoritmo



$ \begin{array}{r} \text{---} \\ \text{Passo 1)} \quad 2516 : 0012 = 0209 \\ -0 \\ \text{--} \\ 2 \\ \text{Passo 2)} \quad 25 \\ -24 \\ \text{----} \\ 1 \\ \text{Passo 3)} \quad 11 \\ -0 \\ \text{----} \\ 11 \\ \text{Passo 4)} \quad 116 \\ -108 \\ \text{-----} \\ 8 \end{array} $	<p>Il 12 nel 2 ci sta 0 volte. $12 \times 0 = 0$</p> <p><u>Resto parziale - I</u> Considero il 5 del divisore e lo affianco al resto parziale. Il 12 nel 25 ci sta 2 volte. $12 \times 2 = 24$</p> <p><u>Resto parziale - II</u> Considero l'1 del dividendo e lo affianco al resto parziale. Il 12 nell'11 ci sta 0 volte. $12 \times 0 = 0$</p> <p><u>Resto parziale - III</u> Considero il 6 del dividendo e lo affianco al resto parziale. Il 12 nel 16 ci sta 1 volta. $12 \times 9 = 108$</p> <p>Resto parziale - IV = RESTO</p>
---	---



La divisione tra numeri binari



Divisione decimale fra i numeri $a = 1.001.010$ e $b = 1.000$ $a : b = ?$

1001010 : 1000 = 1	Dividendo : Divisore	$74 : 8 = 9$ resto 2
1000-		

1		

1001010 : 1000 = 1001	Quoziente
-----------------------	-----------

1000-	

1010 Resto parziale	
1000-	

10 Resto	

$$\text{Dividendo} = \text{Quoziente} \times \text{Divisore} + \text{Resto}$$



Confronto tra moltiplicazione e divisione



- La moltiplicazione opera per somme successive di quantità pesate con peso crescente.
- La sottrazione opera erodendo dal dividendo quantità pesate con peso decrescente.
- La moltiplicazione è costituita da somme ripetute del moltiplicando.
- La divisione è costituita da sottrazioni ripetute (del divisore)
 - $N : M = Q + R \Rightarrow N - M * Q = R$



Confronto tra divisione tra numeri binari e decimali



In DECIMALE:

Ad ogni passo devo verificare QUANTE VOLTE il resto parziale contiene il divisore. Il risultato è un numero che va da 0 a $9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 0 = il divisore non è contenuto nel resto.

In BINARIO:

Ad ogni passo devo verificare SE il resto parziale contiene il divisore. Ovverosia se lo contiene 0 o 1 volta. Il risultato è un numero che può valere $\{0, 1\}$.

In DECIMALE:

Il numero che viene sottratto al resto parziale è ottenuto moltiplicando il divisore per una delle cifre da 0 a 9.

In BINARIO:

Il numero che viene sottratto al resto parziale può essere solamente 0 o il DIVISORE stesso

In entrambi i casi il quoziente si forma dalla cifra più significativa, cioè da sinistra a destra.



Peculiarità della divisione



- Come rappresento la condizione “il divisore è contenuto nel resto parziale”?

Esempi:

10 (resto parziale) non è contenuto in 1000 (divisore)

1001 (resto parziale) è contenuto in 1000 (divisore)

Per tentativo.

Eseguo la sottrazione.

Risultato $\geq 0 \rightarrow$ il resto parziale è contenuto nel divisore.

Risultato $< 0 \rightarrow$ il resto parziale non è contenuto nel divisore (è più piccolo del divisore).

Osserviamo che nel secondo caso abbiamo fatto in realtà una sottrazione che non avremmo dovuto effettuare.

NB il calcolatore non può sapere se il resto parziale contiene il divisore fino a quando non ha effettuato la sottrazione.



La divisione tra numeri binari



Divisione decimale fra i numeri su 7 bit: $a = 100\ 1010$ e $b = 000\ 1000$ $a : b = ?$ $74 : 8 = ?$

Nel primo passaggio allineo il divisore con la prima cifra significativa (=1) del dividendo.

Allocazione di 14 bit

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 0000\ 000\ 100\ 1010 - \\
 0000\ 100\ 000\ 0000 = \\
 \hline
 1111100100\ 1010
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 0000\ 000\ 100\ 1010 + \\
 1111\ 100\ 000\ 0000 = \\
 \hline
 1111\ 100\ 100\ 1010
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Resto parziale} = \text{dividendo} - \text{divisore} * 2^6 \\
 \\
 (= -438_{10}) \quad \text{Nuovo resto parziale} \\
 \text{provvisorio}
 \end{array}
 \end{array}$$

Ripristino il resto parziale precedente: 0000 000 100 1010



Note e strategia di implementazione



I bit del dividendo vengono analizzati da sx a dx. Il divisore viene spostato verso dx di 1 bit ad ogni passo.

Il quoziente cresce dal bit più significativo verso il bit meno significativo. Cresce verso dx.

All'inizio il divisore è allineato alla sinistra del dividendo: le cifre del dividendo sono allineate agli 0 del divisore e gli 0 del dividendo sono allineati alle cifre del divisore.

Ci sono N+1 passi di divisione, il primo darà sempre 0 e si potrebbe omettere.

Occorre quindi effettuare:

Shift quoziente a sx ad ogni passo.

Scrittura di 1 o 0 nel registro quoziente.

Shift del divisore verso dx ad ogni passo..

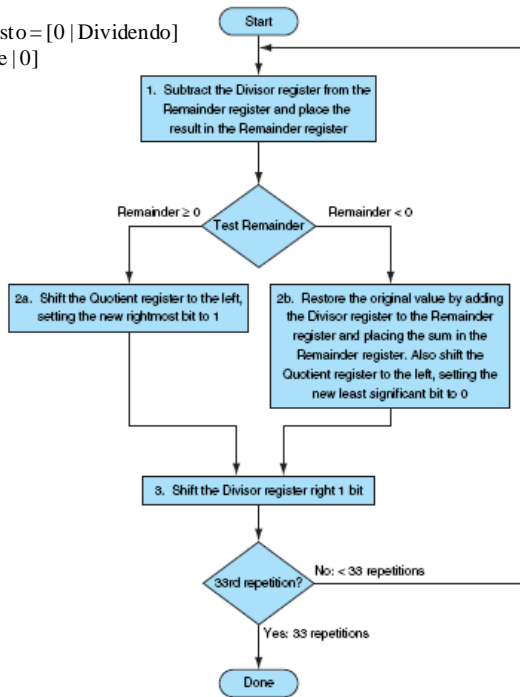
Utilizzo un unico registro per dividendo e resto.

Considero il primo resto parziale uguale al dividendo (inizializzazione).

Il primo passo sarà "a vuoto" perchè produrrà sempre quoziente 0.



Inizializzazione: Resto = [0 | Dividendo]
 Divisore = [Divisore | 0]
 Quoziente = 0
 k = 0



Divisione:: algoritmo per 32 bit



Esempio

Divisione decimale fra i numeri $a = 7$ e $b = 2$ $a : b = ?$

Inizializzo il divisore alla sinistra delle quattro cifre significative. La prima cifra del quoziente sarà sempre 0.

Iteration	Step	Quotient	Divisor	Remainder
0	Initial values	0000	0010 0000	0000 0111
1	1: Rem = Rem - Div	0000	0010 0000	1110 0111
	2b: Rem < 0 \Rightarrow +Div, sll Q, Q0 = 0	0000	0010 0000	0000 0111
	3: Shift Div right	0000	0001 0000	0000 0111
2	1: Rem = Rem - Div	0000	0001 0000	1111 0111
	2b: Rem < 0 \Rightarrow +Div, sll Q, Q0 = 0	0000	0001 0000	0000 0111
	3: Shift Div right	0000	0000 1000	0000 0111
3	1: Rem = Rem - Div	0000	0000 1000	1111 1111
	2b: Rem < 0 \Rightarrow +Div, sll Q, Q0 = 0	0000	0000 1000	0000 0111
	3: Shift Div right	0000	0000 0100	0000 0111
4	1: Rem = Rem - Div	0000	0000 0100	0000 0011
	2a: Rem \geq 0 \Rightarrow sll Q, Q0 = 1	0001	0000 0100	0000 0011
	3: Shift Div right	0001	0000 0010	0000 0011
5	1: Rem = Rem - Div	0001	0000 0010	0000 0001
	2a: Rem \geq 0 \Rightarrow sll Q, Q0 = 1	0011	0000 0010	0000 0001
	3: Shift Div right	0011	0000 0001	0000 0001



Esempio – step 1



Il resto parziale è inizializzato a: [0 | dividendo]: 0000 0111

$$\begin{array}{r}
 \text{---} \\
 0000 \text{ 0111} : 0010 = \\
 -0010 \text{ 0000} \\
 \text{-----} \\
 <0
 \end{array}$$

Il divisore non è contenuto nel resto parziale

Osservando i registri, in pratica, eseguiamo la differenza tra:

$$\begin{array}{r}
 0000 \text{ 0111} - \quad 7 \quad - \text{ Resto parziale} \\
 0010 \text{ 0000} = \quad 32 = 2 \cdot 2^4 - \text{ Divisore allineato al di fuori e alla sx dei 4 bit del dividendo.} \\
 \text{-----} \\
 1110 \text{ 0111} + \quad -25_{10} \quad < 0 \\
 0010 \text{ 0000} = \\
 \text{-----} \\
 0000 \text{ 0111} \quad +7
 \end{array}$$

Quoziente al passo 1: 0
Storno la sottrazione



Esempio – step 2



Il resto parziale è ancora uguale al dividendo: 0000 0111

$$\begin{array}{r}
 \text{---} \\
 0000 \text{ 0111} : 0010 = \\
 -0001 \text{ 0000} \\
 \text{-----} \\
 <0
 \end{array}$$

Il divisore (0001 0000) non è contenuto nel resto parziale

Osservando i registri, in pratica, eseguiamo la differenza tra:

$$\begin{array}{r}
 0000 \text{ 0111} - \quad 7 \quad - \text{ Resto parziale} \\
 0001 \text{ 0000} = \quad 16 = 2 \cdot 2^3 - \text{ Divisore allineato al MSB dei 4 bit del dividendo.} \\
 \text{-----} \\
 1111 \text{ 0111} + \quad -9_{10} + \quad < 0 \\
 0001 \text{ 0000} = \quad 16 \\
 \text{-----} \\
 0000 \text{ 0111} \quad +7
 \end{array}$$

Quoziente al passo 2: 00
Storno ancora la sottrazione



Esempio – step 3



Il resto parziale è ancora uguale al dividendo: 0000 0111

$$\begin{array}{r}
 \text{---} \\
 0000 \text{ 0111} : 0010 = \\
 -0000 \text{ 1000} \\
 \text{-----} \\
 <0
 \end{array}$$

Il divisore (0000 1000) non è contenuto nel resto parziale (0111)

Osservando i registri, in pratica, eseguiamo la differenza tra:

0000 0111 –	7	- Resto parziale	
0000 1000 =	$8 = 2 * 2^2$	- Divisore allineato al terzo dei 4 bit del dividendo.	

1111 1111+	-1_{10}	< 0	Quoziente al passo 3: 000
0000 1000=	+8		Storno ancora la sottrazione

0000 0111	+7		



Esempio – step 4



Il resto parziale è ancora uguale al dividendo: 0000 0111

$$\begin{array}{r}
 \text{---} \\
 0000 \text{ 0111} : 0010 = \\
 -0000 \text{ 0100} \\
 \text{-----} \\
 0 \text{ 001} \quad > 0
 \end{array}$$

Il divisore (0000 0010) è contenuto nel resto parziale

Osservando i registri, in pratica, eseguiamo la differenza tra:

0000 0111 –	Resto parziale	
0000 0100 =	Divisore allineato al secondo dei 4 bit del dividendo.	

0000 0011	3_{10}	E' il nuovo resto parziale $7 - 1 * 2^2 = 3$

Quoziente al passo 4: 0001

Non storno la sottrazione.

Il resto non è più uguale al dividendo.



Esempio – step 5

Il resto parziale = 0000 0011

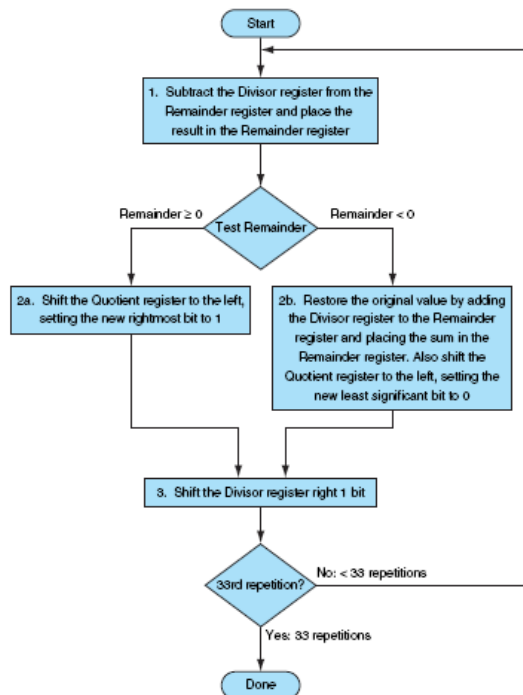
$$\begin{array}{r}
 \text{---} \\
 0000 \text{ 0111} : 0010 = \\
 -0000 \text{ 0010} \\
 \text{-----} \\
 0001 \quad > 0
 \end{array}$$

Il divisore (0010) è contenuto nel resto parziale

Osservando i registri, in pratica, eseguiamo la differenza tra:

$$\begin{array}{r}
 0000 \text{ 0011} - \text{ Resto parziale} \\
 0000 \text{ 0010} = \text{ Divisore allineato LSB dei 4 bit del dividendo.} \\
 \text{-----} \\
 0000 \text{ 0001} \quad 1_{10} \quad \text{E' il nuovo resto parziale } 3 - 1 * 2^1 = 1 \quad \text{RESTO FINALE}
 \end{array}$$

Quoziente al passo 5: 00011

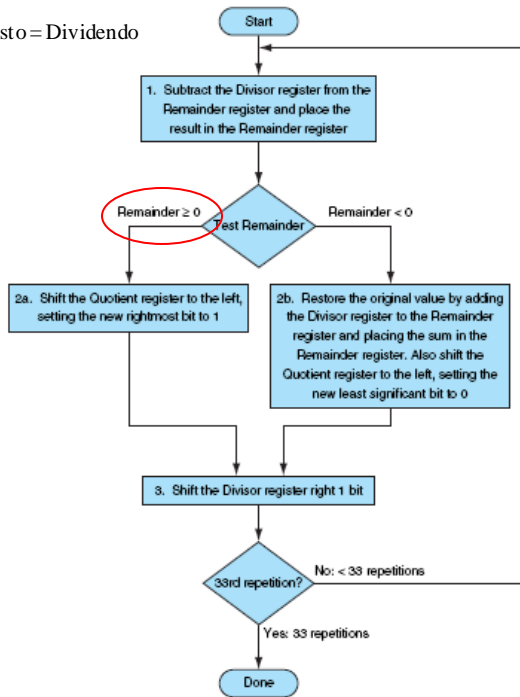


Divisione:: algoritmo



Inizializzazione: Resto = Dividendo



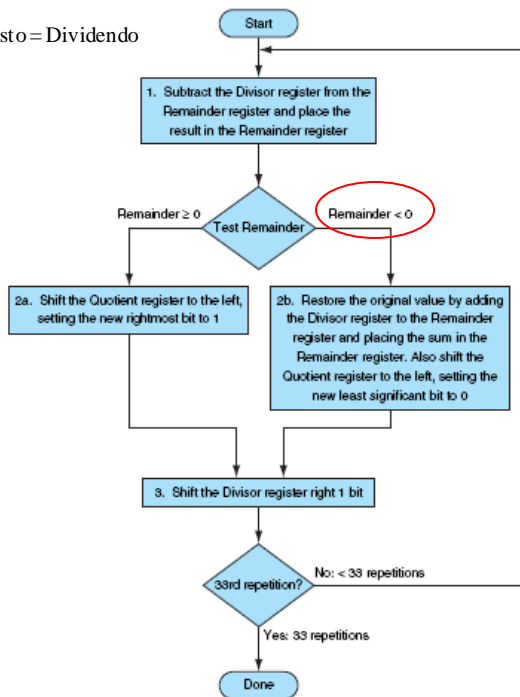
$$\begin{array}{r}
 1001010 : 1000 = 1 \\
 -1000 \\
 \hline
 1010
 \end{array}$$


Divisione:: passo 1



Inizializzazione: Resto = Dividendo



$$\begin{array}{r}
 1001010 : 1000 = 10 \\
 -1000- \\
 \hline
 1010 \\
 -1000 \\
 \hline
 < 0
 \end{array}$$


Divisione:: passo 2



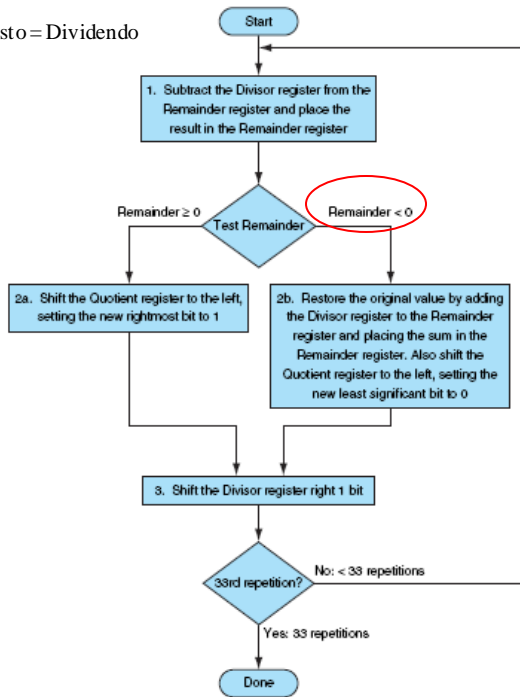
Inizializzazione: Resto = Dividendo



1001010 : 1000 = 100
 -1000-

 1010
 -1000

 < 0



Divisione:: passo 3



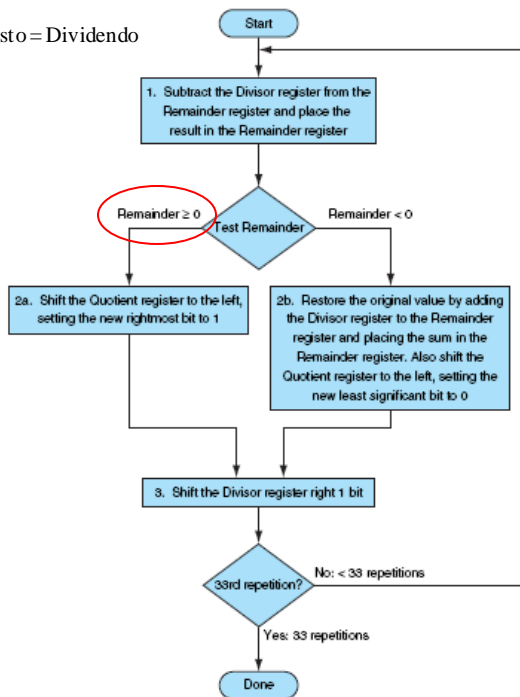
Inizializzazione: Resto = Dividendo



1001010 : 1000 = 1001
 -1000-

 1010
 -1000

 10



Divisione:: passo 4



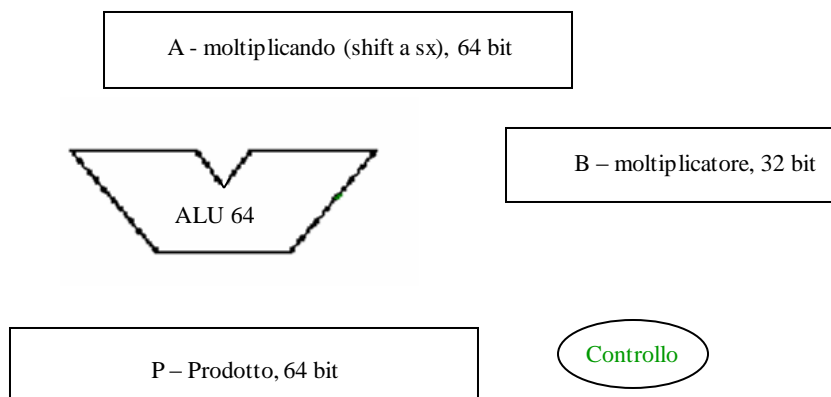
Sommario



- Divisione intera
- **Circuiti divisione intera**
- Divisione e moltiplicazione



Implementazione circuitale gli stessi attori della moltiplicazione

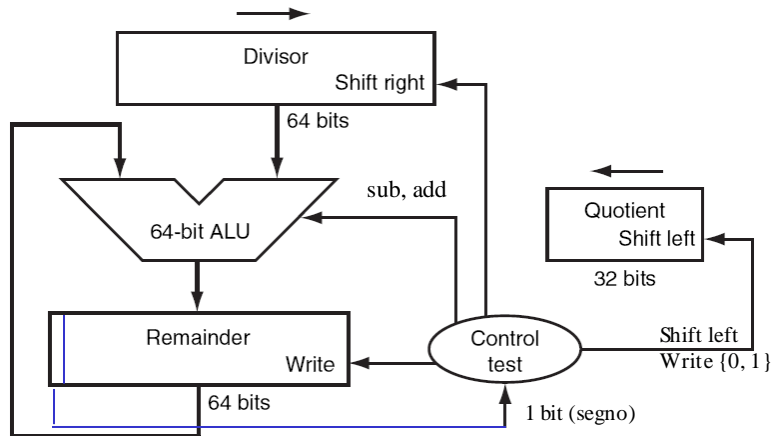




Il circuito firmware della divisione



Inizializzazione: Resto=0 | Dividendo



Come ottimizzare il circuito della divisione



Il resto si sposta di 1 bit alla volta verso dx ma rimane pari al numero di bit della parola.
Possiamo evitare di spostare il resto.

Il divisore si sposta verso dx di un bit ad ogni passo e viene sottratto al resto parziale.
Otteniamo lo stesso risultato se **spostiamo il resto parziale a sx di un bit ad ogni passo.**
Il quoziente si sposta verso sx ad ogni passo.

Inizializziamo il resto come $RESTO = 0 \mid DIVIDENDO$.

Alla fine avremo: $RESTO \mid QUOZIENTE$.

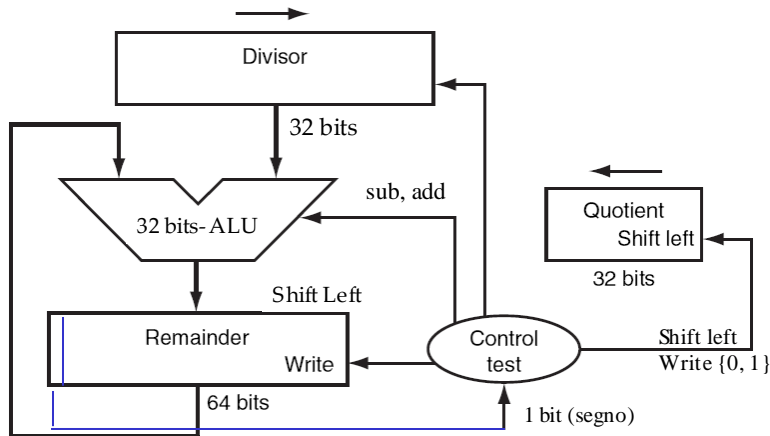
Ad ogni passo sposto il dividendo di una posizione a sx ed inserisco un bit del quoziente.



Il circuito firmware con un'ottimizzazione



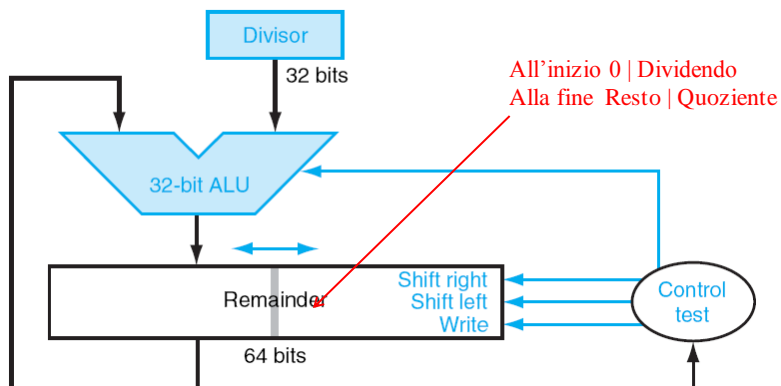
Inizializzazione: Resto=0 | Dividendo



Il circuito firmware ottimizzato della divisione

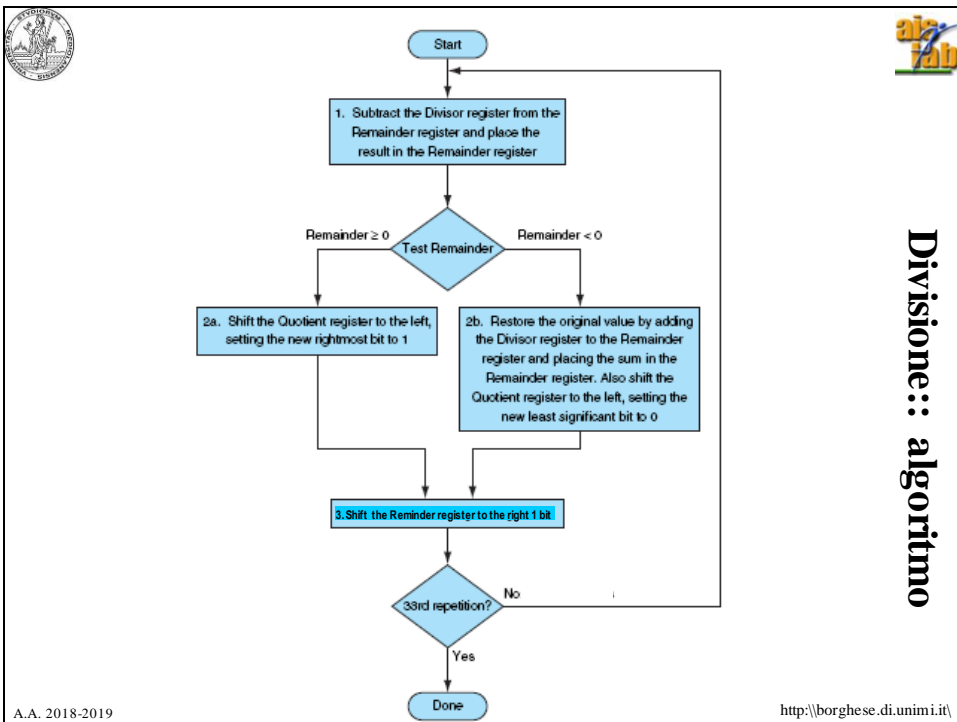


Inizializzazione: Resto=0 | Dividendo





Divisione:: algoritmo

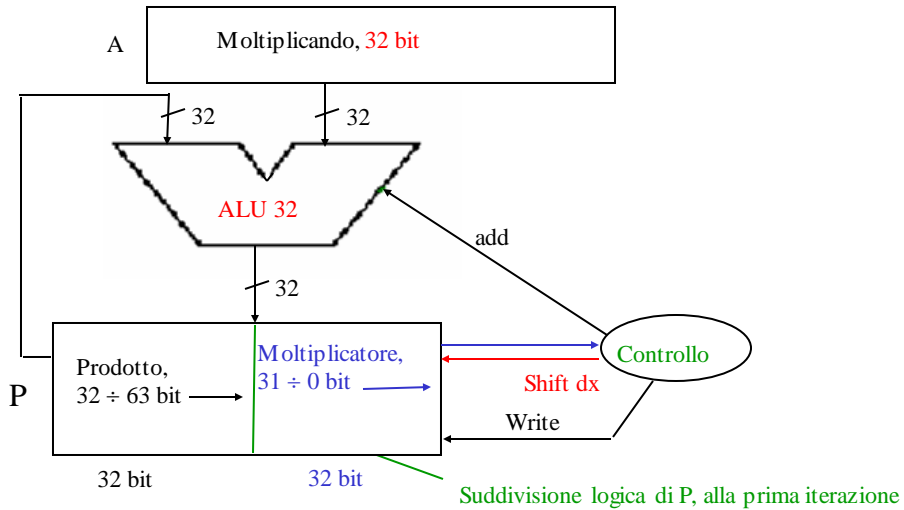


Sommario

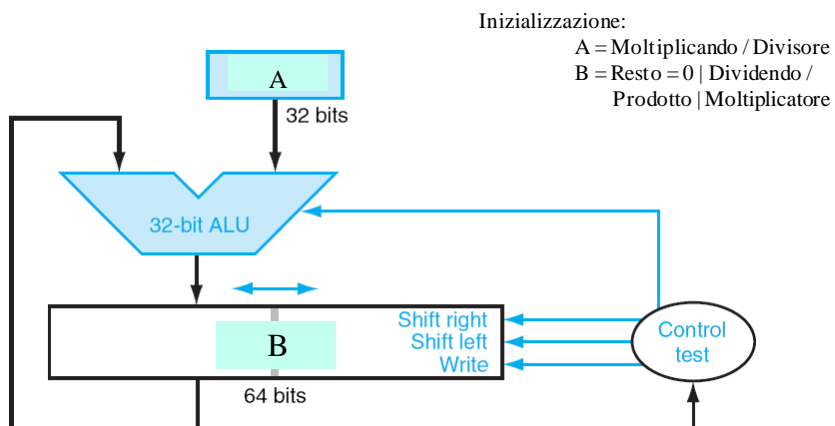
- Divisione intera
- Circuiti divisione intera
- **Divisione e moltiplicazione**



Circuito ottimizzato della moltiplicazione



Un unico circuito per moltiplicazione e divisione





Sommario



- Divisione intera
- Circuiti divisione intera
- Divisione e moltiplicazione