


Floating pointer adder
ISA

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
borghese@di.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti sul Patterson, 5a Ed.: 3.4, 3.5, 4.2


Sommario

- Somma in virgola mobile
- ISA
- Istruzioni aritmetico-logiche

Codifica in virgola mobile
Standard IEEE 754 (1980)

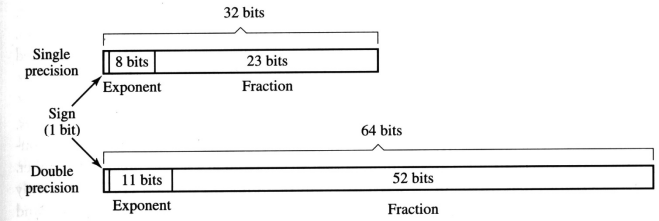


Figure 2-10 **Single-precision and double-precision IEEE 754 floating point formats.**

Rappresentazione polarizzata dell'esponente:

Polarizzazione pari a 127 per singola precisione =>
1 viene codificato come 1000 0000.

Polarizzazione pari a 1023 in doppia precisione.
1 viene codificato come 1000 0000 000.

Esempio di somma in virgola mobile

$a = 7{,}999 \times 10^{1}$ $b = 1{,}61 \times 10^{-1}$ $a + b = ?$

NB I numeri decimali sono normalizzati.

Una possibilità è:

```
 79,99  +
  0,161 =
---------
```

$80{,}151 \times 10^{0} = 80{,}151 \rightarrow 8{,}0151 \times 10^{1}$ in forma normalizzata

Altre possibilità sono:

```
 799,9   +
   1,61 =
----------
```

$801{,}51 \times 10^{-1} = 8{,}0151 \times 10^{1}$ in forma normalizzata

```
 7,999   +
0,0161 =
----------
```

$8{,}0151 \times 10^{1}$

Quale forma conviene utilizzare?

Supponiamo di avere 4 cifre in tutto: 1 per la parte intera e 3 per la parte decimale

79,99 +	799,9 +	7,999 +
0,161 =	1,61 =	0,0161 =
---	---	---
$80,151 \times 10^{0}$	$801,51 \times 10^{-1}$	$8,0151 \times 10^{1}$

La rappresentazione migliore è:

7,999 +
0,0161 =

$8,0151 \times 10^{1}$

Con la quale posso scrivere: 1 cifra prima della virgola (8) e 3 cifre dopo la virgola (015), 1 va perso.

Con la rappresentazione più a sinistra, perdo le decine, con quella in mezzo decine e centinaia commettendo un errore grande sulla rappresentazione.

Allineo al numero con esponente maggiore.

Approssimazione

Interi -> risultato esatto (o overflow)

Numeri decimali -> Spesso occorrono delle approssimazioni

- Troncamento (floor): $1,001 \times 10^{2}$ (cf. Slide precedente)
- Arrotondamento alla cifra superiore (ceil): $1,002 \times 10^{2}$
- Arrotondamento alla cifra più vicina: $1,002 \times 10^{2}$

IEEE754 prevede 2 bit aggiuntivi nei calcoli per mantenere l'accuratezza.
bit di guardia (guard)
bit di arrotondamento (round)

Esempio: aritmetica in floating point accurata

a = 2,34 b = 0,0256 a + b = ?

Codifica su 3 cifre decimali totali.
Approssimazione mediante arrotondamento.

Senza cifre di arrotondamento devo scrivere:

2,34 +
0,02 =

2,36

Con il bit di guardia e di arrotondamento posso scrivere:

2,3400 +
0,0256 =

2,3656

L'arrotondamento finale (al più vicino) fornisce per rintrare in 3 cifre decimali fornisce: **2,37**

L'effetto perverso del troncamento

C = A + B
if (C ≤ A) then
  (a)…
else
  (b)….

A = $7,999 \times 10^{1}$ B = $1,61 \times 10^{-1}$ C = A + B = 8,0151
Passando alla codifica su 4 bit ottengo:
A = $7,999 \times 10^{1}$ B = $1,61 \times 10^{-1}$ C = A + B = 8,015 => C > A correttamente

A = $7,999 \times 10^{1}$ B = $1,61 \times 10^{-4}$ C = A + B = 7,999161
Passando alla codifica su 4 bit ottengo:
A = $7,999 \times 10^{1}$ B = $1,61 \times 10^{-4}$ C = A + B = 7,999 => C = A errore!!!

Questo è un errore molto comune quando si considera l'aritmetica con i numeri decimali

Algoritmo di somma in virgola mobile - I

1) Trasformare i due numeri in modo che le due rappresentazioni abbiano la stessa base: allineamento della virgola. Quale si allinea?

2) Effettuare la somma delle mantisse.

Se il numero risultante è normalizzato termino qui. Altrimenti:

3) Normalizzare il risultato.

Algoritmo di somma in virgola mobile - II

1) Trasformare **uno dei due numeri** in modo che le due rappresentazioni abbiano la stessa base: allineamento della virgola. Si allinea all'esponente più alto (denormalizzo il numero più piccolo).

2) Effettuare la somma delle mantisse.

Se il numero risultante è normalizzato termino qui. Altrimenti:

3) Normalizzare il risultato.

Esempio di somma in virgola mobile - II

a = 9,999 x 10^1 b = 1,61 x 10^{-1} a + b = ?

Supponiamo di avere a disposizione 4 cifre per la mantissa e due per l'esponente.

Devo trasformare uno dei numeri, una possibilità è:

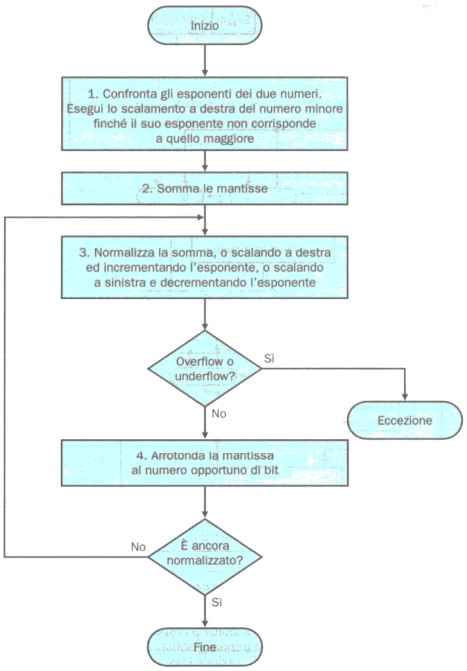
9,999 x 10^1 +
0,016 x 10^1 = Perdo un bit perchè non rientra nella capacità della mantissa
---
10,015 x 10^1 Il risultato non è più normalizzato, anche se i due addendi sono normalizzati.

Normalizzazione per ottenere il risultato finale:

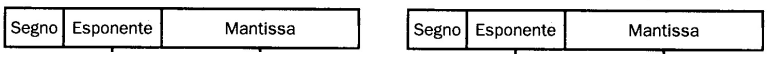
10,015 x 10^1 = 1,001 x 10^2 in forma normalizzata.

NB: In questa fase si può generare la necessità di rinormalizzare il numero (passo 3):
Esempio: 9,99999 x 10^2 => Arrotondo alla cifra più vicina => 10,00 x 10^3
=> Normalizzazione => 1,0 x 10^4

Algoritmo risultante

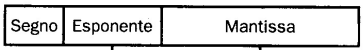


Il circuito della somma floating point: gli attori



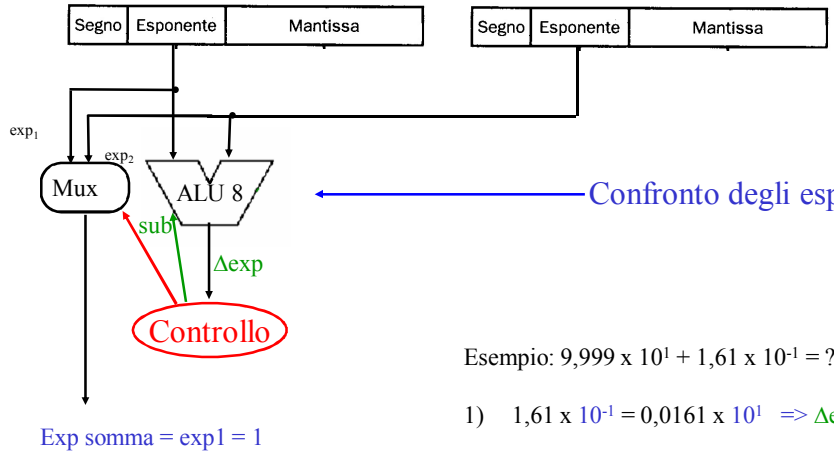
A + B

C



Rappresentazione normalizzata IEEE754

Il circuito della somma floating point: determinazione dell'esponente comune

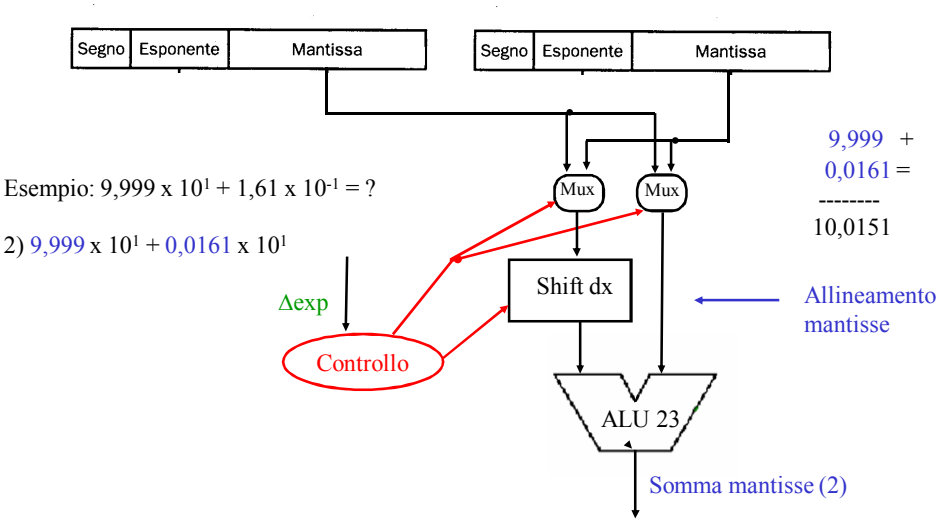


Confronto degli esponenti

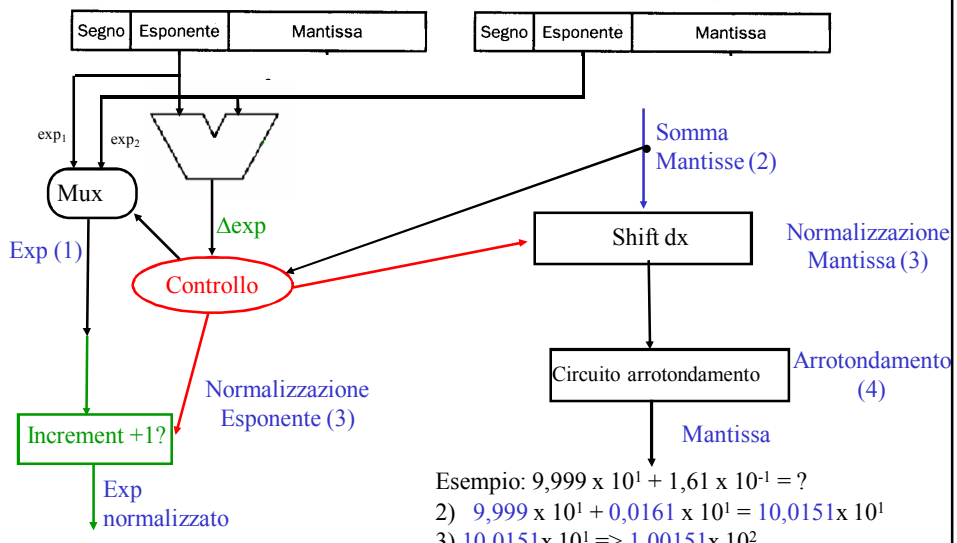
Esempio: $9{,}999 \times 10^{1} + 1{,}61 \times 10^{-1} = ?$

1) $1{,}61 \times 10^{-1} = 0{,}0161 \times 10^{1}$ => $\Delta exp = +2$

Il circuito della somma floating point: allineamento delle mantisse e somma



Il circuito della somma floating point: arrotondamento e normalizzazione



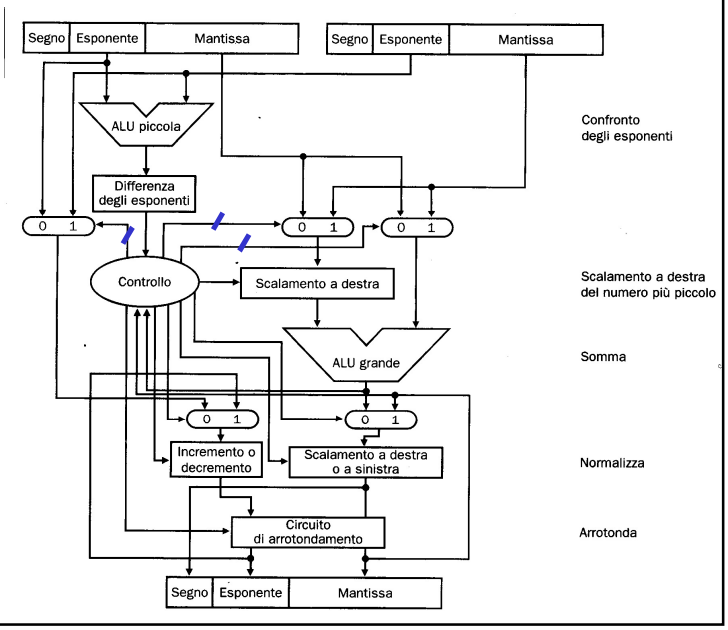
Circuito della somma floating point

Le tre linee in blu contengono lo stesso segnale di controllo.

Gestisce anche la rinormalizzazione: $9{,}99999 \times 10^2 = 10{,}00 \times 10^3$

Gestisce anche i numeri negativi.

Problemi?



Problemi di troncamento

A = 4
B = $1{,}00000035762786865234 38 \times 10^0$

In IEEE754:
A = 1×2^2
B = 1, 00000 00000 00000 00000 011 x 2^0

A = 0 1000 0001 00000 00000 00000 00000 000
B = 0 1111 1111 00000 00000 00000 00000 011

Allineo B ad A => B = 0, 01000 00000 00000 00000 00011 x 2^2
Segue che:
C = A + B = 1,01000 00000 00000 00000 00011 x 2^2

Codificando C = 0 1000 0001 01000 00000 00000 00000 000 = $5d_{ec}$

Sottrazione

P = 0,5 – 0,4375 somma binaria con precisione di 4 bit.

$A = 1{,}000 \times 2^{-1}$
$B = -1{,}110 \times 2^{-2}$ Espressione in forma normalizzata.

1) Allineamento di A e B. Trasformo B: $-1{,}110 \times 2^{-2} = -0{,}1110 \times 2^{-1}$
2) Sottrazione delle mantisse: $1{,}000 + (-0{,}111) = 0{,}001 \times 2^{-1}$
3) Normalizzazione della somma: $0{,}001 \times 2^{-1} = 1{,}000 \times 2^{-4}$
   Controllo di overflow o underflow: $-126 \leq -4 \leq 127$.
4) Arrotondamento della somma: 1,000 non lo richiede.

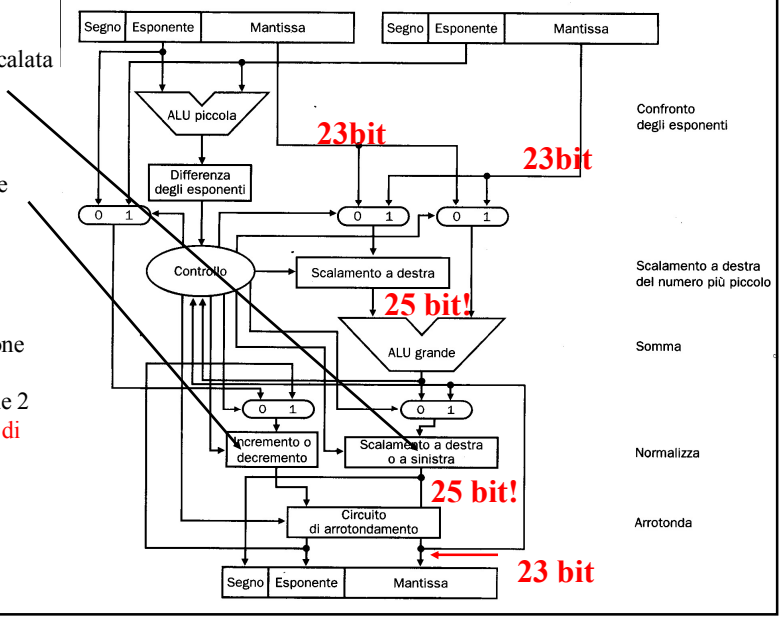
$1{,}000 \times 2^{-4} = 1/2^4 = 1/16 = 0{,}0625$ c.v.d.

Circuito della somma floating point con bit di arrotondamento

In quale caso la mantissa viene scalata a sx?

In quale caso l'esponente viene decrementato?

La rappresentazione interna, secondo IEEE 754, prevede 2 bit aggiuntivi: bit di guardia e bit di arrotondamento.



Prodotto e divisione in virgola mobile

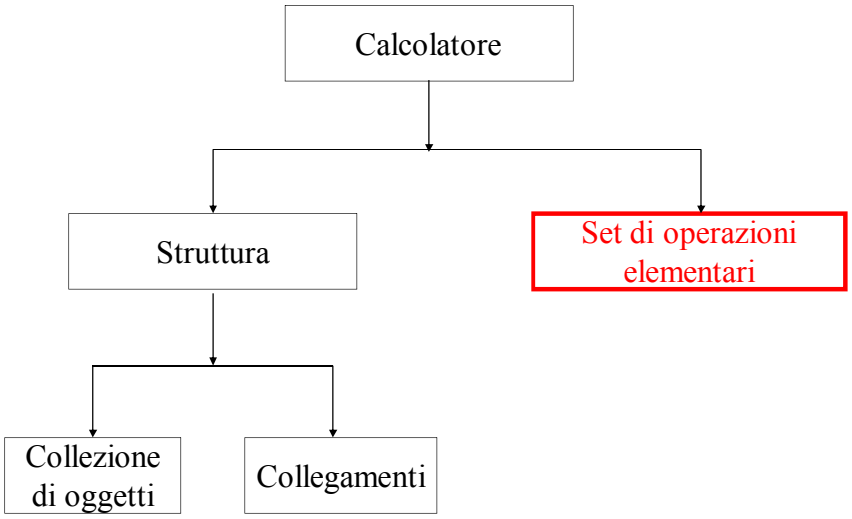
- Prodotto delle mantisse
- Somma degli esponenti
- Normalizzazione

- Divisione in virgola mobile = Prodotto di un numero per il suo inverso.

Sommario

- Somma in virgola mobile
- ISA
- Istruzioni aritmetico-logiche

Descrizione di un elaboratore



Definizione di un'ISA

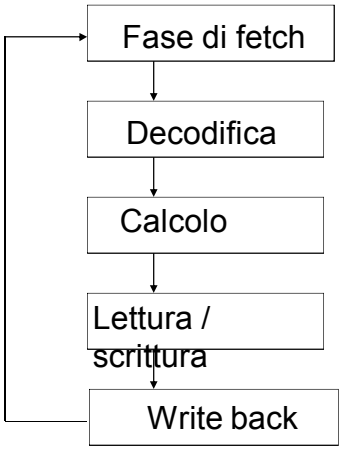
Definizione del funzionamento: insieme delle istruzioni (interfaccia verso i linguaggi ad alto livello).

- Tipologia di istruzioni.
- Meccanismo di funzionamento.

Definizione del formato: codifica delle istruzioni (interfaccia verso l'HW).

- Formato delle istruzioni.
- Suddivisione in gruppi omogenei dei bit che costituiscono l'istruzione.

Caratteristiche di un'ISA



Formato e codifica di un'istruzione
- tipi di formati e dimensione delle istruzioni.

Posizione degli operandi e risultato.
- quanti?
- dove? (memoria e/o registri)

Tipo e dimensione dei dati

Operazioni consentite

Le istruzioni di un'ISA

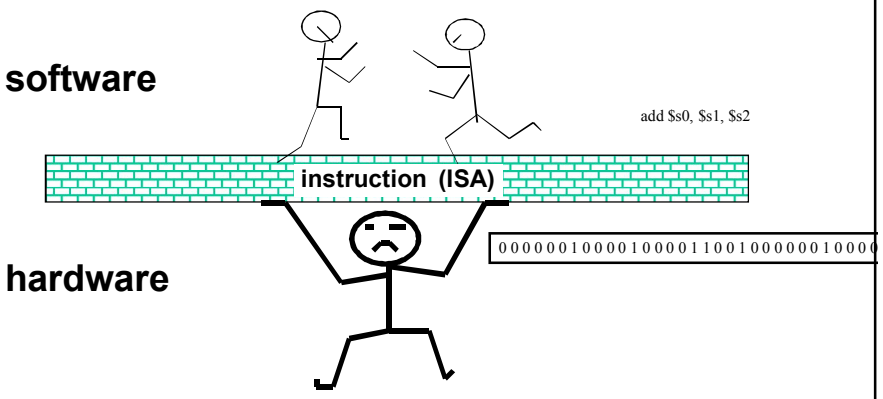
Devono contenere tutte le informazioni necessarie ad eseguire il ciclo di esecuzione dell'istruzione: registri, comandi, ...

Ogni architettura di processore ha il suo linguaggio macchina

- Architettura dell'insieme delle istruzioni elementari messe a disposizione dalla macchina (in linguaggio macchina).
  - **ISA (Instruction Set Architecture)**
- Due processori con lo stesso linguaggio macchina hanno la stessa architettura delle istruzioni anche se le implementazioni hardware possono essere diverse.
- Consente al SW di accedere direttamente all'hardware di un calcolatore.

L'architettura delle istruzioni, specifica come vengono costruite le istruzioni in modo tale che siano comprensibili alla macchina (in linguaggio macchina).

Insieme delle istruzioni



Quale è più facile modificare?

Tipi di istruzioni

- Le istruzioni comprese nel linguaggio macchina di ogni calcolatore possono essere classificate nelle seguenti quattro categorie:
  - Istruzioni aritmetico-logiche;
  - Istruzioni di trasferimento da/verso la memoria *(load/store);*
  - Istruzioni di salto condizionato e non condizionato per il controllo del flusso di programma;
  - Istruzioni di trasferimento in ingresso/uscita (I/O).


Le istruzioni in linguaggio macchina

- Linguaggio di programmazione direttamente comprensibile dalla macchina
  - Le parole di memoria sono interpretate come *istruzioni*
  - Vocabolario è *l'insieme delle istruzioni (instruction set)*

Programma in linguaggio ad alto livello (C)

```
a = a + c
b = b + a
var = m [a]
```

Programma in linguaggio macchina

```
011100010101010
000110101000111
000010000010000
001000100010000
```



Linguaggio Assembly

- Le istruzioni assembler sono una rappresentazione simbolica del linguaggio macchina comprensibile dall'HW.
- Rappresentazione simbolica del linguaggio macchina
  - Più comprensibile del linguaggio macchina in quanto utilizza simboli invece che sequenze di bit
- Rispetto ai linguaggi ad alto livello, l'assembler fornisce limitate forme di controllo del flusso e non prevede articolate strutture dati
- Linguaggio usato come linguaggio target nella fase di compilazione di un programma scritto in un linguaggio ad alto livello (es: C, Pascal,ecc.)
- Vero e proprio linguaggio di programmazione che fornisce la visibilità diretta sull'hardware.

Linguaggio C: somma dei primi 100 numeri al quadrato

```
main()
{
        int i;
        int sum = 0;
        for (i = 0; i <= 100; i = i + 1)
                sum = sum + i*i;
        printf("La somma da 0 a 100 è
    %d\n",sum);
}
```


Linguaggio Assembly: somma dei primi 100 numeri al quadrato

```
.text
.align 2
.globl main
main:
        add $t6, $zero, $zero
        add $s0, $zero, $zero
        add $s1, $a0, $zero
loop:   mult $t4, $t6, $t6
        addu $s0, $s0, $t4
        addu $t6, $t6, 1
        bne $t6, $s1, loop
        .....
```

Assembly come linguaggio di programmazione

- Principali *svantaggi* della programmazione in linguaggio assembly:
  - Mancanza di portabilità dei programmi su macchine diverse
  - Maggiore lunghezza, difficoltà di comprensione, facilità d'errore rispetto ai programmi scritti in un linguaggio ad alto livello
- Principali *vantaggi* della programmazione in linguaggio assembly:
  - Ottimizzazione delle prestazioni.
  - Massimo sfruttamento delle potenzialità dell'hardware sottostante.

- Le strutture di controllo hanno forme limitate
- Non esistono tipi di dati all'infuori di interi, virgola mobile e caratteri.
- La gestione delle strutture dati e delle chiamate a procedura deve essere fatta in modo esplicito dal programmatore.

Assembly come linguaggio di programmazione

- Alcune applicazioni richiedono un approccio *ibrido* nel quale le parti più critiche del programma sono scritte in assembly (per massimizzare le prestazioni) e le altre parti sono scritte in un linguaggio ad alto livello (le prestazioni dipendono dalle capacità di ottimizzazione del compilatore).

  Esempio: Sistemi embedded o dedicati

Sistemi "automatici" di traduzione da linguaggio ad alto livello (linguaggio C) ad Assembly e codice binario ed implementazione circuitale (e.g. sistemi di sviluppo per FPGA).

I registri

- Un registro è un insieme di celle di memora che vengono lette / scritte in parallelo.
- I registri sono associati alle variabili di un programma dal compilatore. Contengono i **dati**.
- Un processore possiede un numero limitato di registri: ad esempio il processore MIPS possiede **32 registri composti da 32-bit (word), register file.**
- I registri possono essere direttamente indirizzati mediante il loro numero progressivo (0, …, 31) preceduto da $: ad es.
  `$0, $1, …, $31`
- Per convenzione di utilizzo, sono stati introdotti nomi simbolici significativi. Sono preceduti da $, ad esempio:

`$s0,$s1,...,$s7($s8)`	Per indicare variabili in C
`$t0, $t1, ... $t9`	Per indicare variabili temporanee

I registri del register file

Nome	Numero	Utilizzo
$zero	0	costante zero
$at	1	riservato per l'assemblatore
$v0-$v1	2-3	valori di ritorno di una procedura
$a0-$a3	4-7	argomenti di una procedura
$t0-$t7	8-15	registri temporanei (non salvati)
$s0-$s7	16-23	registri salvati
$t8-$t9	24-25	registri temporanei (non salvati)
$k0-$k1	26-27	gestione delle eccezioni
$gp	28	puntatore alla global area (dati)
$sp	29	stack pointer
$s8	30	registro salvato (fp)
$ra	31	indirizzo di ritorno


I registri per le operazioni floating point

- Esistono 32 registri utilizzati per l'esecuzione delle istruzioni.
- Esistono **32** registri per le operazioni floating point (virgola mobile) indicati come

  `$f0, …, $f31`

  – Per le operazioni in doppia precisione si usano i registri contigui

  `$f0, $f2, $f4, …`


Sommario

- Somma in virgola mobile
- ISA
- Istruzioni aritmetico-logiche

Tipi di istruzioni

```
for (i=0; i<N; i++)          // Istruzioni di controllo
{   elem = i*N + j;          // Istruzioni aritmetico-logiche
    s = v[elem];             // Istruzioni di accesso a memoria
  z[elem] = s;               // Istruzioni di accesso a memoria
}
```


Tipi di istruzioni

- Le istruzioni comprese nel linguaggio macchina di ogni calcolatore possono essere classificate nelle seguenti quattro categorie:
  - Istruzioni aritmetico-logiche;
  - Istruzioni di trasferimento da/verso la memoria *(load/store);*
  - Istruzioni di salto condizionato e non condizionato per il controllo del flusso di programma;
  - Istruzioni di trasferimento in ingresso/uscita (I/O).

Istruzioni aritmetico-logiche

- In MIPS, un'istruzione aritmetico-logica possiede in generale *tre* operandi: i due registri contenenti i valori da elaborare *(registri sorgente)* e il registro contenente il risultato *(registro destinazione)*.
- L'ordine degli operandi è **fisso:** prima il registro contenente il risultato dell'operazione e poi i due operandi.
- L'istruzione assembly contiene il codice operativo e tre campi relativi ai tre operandi:

```
OPCODE  DEST,  SORG1, SORG2
```

Le operazioni vengono eseguite esclusivamente su dati presenti nella CPU, non su dati residenti nella memoria.

Esempi: istruzioni `add` e `sub`

Codice C: `R = A + B;`

Codice assembler MIPS:

```
add $s16,  $s17,  $s18
add  rd,   rs,    rt
```

mette la somma del contenuto di rs e rt in rd:

```
add rd, rs, rt        # rd ← rs + rt
```

Nella traduzione da linguaggio ad alto livello a linguaggio assembly, le variabili sono associate ai registri dal compilatore

`sub` serve per sottrarre il contenuto di due registri sorgente rs e rt:

```
sub rd rs rt
```

e mettere la differenza del contenuto di rs e rt in rd

```
sub rd, rs, rt        # rd ← rs - rt
```

Istruzioni aritmetico-logiche in sequenza

Il fatto che ogni istruzione aritmetica ha tre operandi sempre nella stessa posizione consente di semplificare l'hw, ma complica alcune cose…

Codice C: `Z = A - (B + C + D) =>`
`E = B + C + D; Z = A - E;`

Suppongo che le variabili siano contenute nei seguenti registri:
A -> $s0 B -> $s1 C -> $s2 D -> $s3 Z -> $s5

Codice MIPS:

```
add $t0, $s1, $s2
add $t1, $t0, $s3
sub $s5, $s0, $t1
```


Istruzioni aritmetico-logiche

- Operazioni con un numero di operandi maggiore di tre possono essere effettuate scomponendole in operazioni più semplici.
- Ad esempio, per eseguire la somma e sottrazione delle variabili `A.. D` nella variabile `Z` servono tre istruzioni :

Codice C: `Z = A + B - C + D`

Codice MIPS:

```
add $t0, $s0, $s1
sub $t1, $t0, $s2
add $s5, $t1, $s3
```

Implementazione alternativa

- Operazioni con un numero di operandi maggiore di tre possono essere effettuate scomponendole in operazioni più semplici.
- Ad esempio, per eseguire la somma e sottrazione delle variabili `A.. D` nella variabile `Z` servono tre istruzioni :

Codice C: `Z = (A + B) – (C – D)`

Codice MIPS:

```
add $t0, $s0, $s1
sub $t1, $s2, $s3
sub $s5, $t0, $t1
```

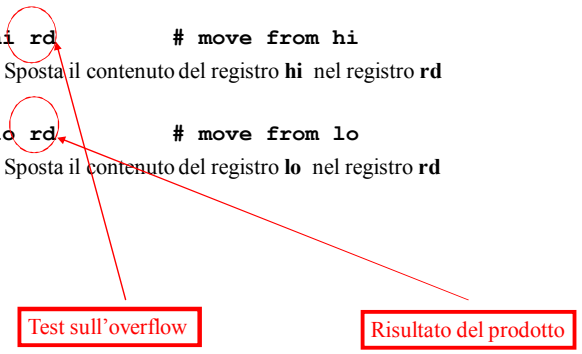
Quale implementazione è la migliore? Sceglierà il compilatore il quale cerca di massimizzare la parallelizzazione del codice.

Moltiplicazione

- Due istruzioni:
  - `mult rs rt`
  - `multu rs rt` `# unsigned`
- Il registro destinazione è ***implicito.***
- Il risultato della moltiplicazione viene posto sempre in due registri dedicati di una parola (special purpose) denominati ***hi (High order word)*** e ***lo (Low order word)***
- La moltiplicazione di due numeri rappresentabili con 32 bit può dare come risultato un numero non rappresentabile in 32 bit

Moltiplicazione

- Il risultato della moltiplicazione si preleva dal registro **hi** e dal registro **lo** utilizzando le due istruzioni:
  - `mfhi rd  # move from hi`
    - Sposta il contenuto del registro **hi** nel registro **rd**
  - `mflo rd  # move from lo`
    - Sposta il contenuto del registro **lo** nel registro **rd**



add: varianti

- `addi $s1, $s2, 100  #add immediate`
  - Somma una costante: il valore del secondo operando è presente nell'istruzione come costante e sommata estesa in segno.
    `rt ← rs + costante`
- `addiu $s0, $s1, 100  #add immediate unsigned`
  - Somma una costante ed evita overflow.
- `addu $s0, $s1, $s2  #add unsigned`
  - Evita overflow: la somma viene eseguita considerando gli addendi sempre positivi. Il bit più significativo è parte del numero e non è bit di segno.

Non esiste un'istruzione di subi. Perchè?

Sommario

- Somma in virgola mobile
- ISA
- Istruzioni aritmetico-logiche