



# I sommatori

Prof. Alberto Borghese  
Dipartimento di Scienze dell'Informazione

[borgnese@di.unimi.it](mailto:borgnese@di.unimi.it)

Università degli Studi di Milano

Riferimenti: Appendice B5 prima parte.



# Sommario

## Addizionatori

Addizionatori ad anticipazione di riporto



## Somma e prodotto logico



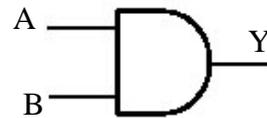
**Somma** => OR

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



**Moltiplicazione**  
=> AND

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



## AND e OR su più bit



1 0 0 1

AND

1 1 0 0

=

1 0 0 0

1 0 0 1

OR

1 1 0 0

=

1 1 0 1



## Operazione di somma



111	← Riporto
1011 +	← Addendo 1
110 =	← Addendo 2
-----	
10001	

3 Attori: addendo 1, addendo 2, riporto.

Viene eseguita sequenzialmente da dx a sx.



## (Half) Adder ad 1 bit

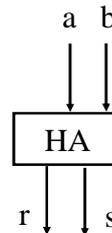
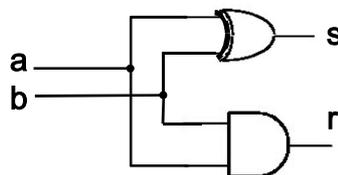


Tabella della verità della somma:

a b	somma	riporto
0 0	0	0
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1

$$s = a \oplus b$$

$$r = ab$$



La somma è diventata un'operazione logica!

Cammini critici:

Somma = 1;

Riporto = 1;

Complessità

Somma = 1 porta;

Riporto = 1 porta;



## Full Adder ad 1 bit



Tabella della verità della somma completa:

a	b	r <sub>in</sub>	somma	riporto
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

$$s = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$$

$$r = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$s = a \bar{b} \bar{r}_{in} + a \bar{b} r_{in} + a b \bar{r}_{in} + a b r_{in} =$$

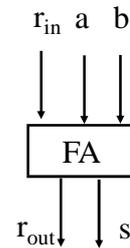
$$= (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (ab + ab) r_{in} =$$

$$= (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = a b \bar{r}_{in} + a \bar{b} r_{in} + a b r_{in} + a b r_{in} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = a r_{in} + (a \oplus r_{in}) b$$

Quale è meglio?

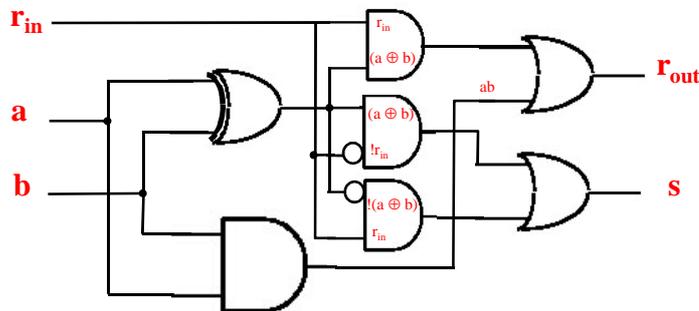


## Implementazione circuitale



$$s = (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$



7 porte logiche.

Cammini critici: s -> 3; r<sub>out</sub> -> 3



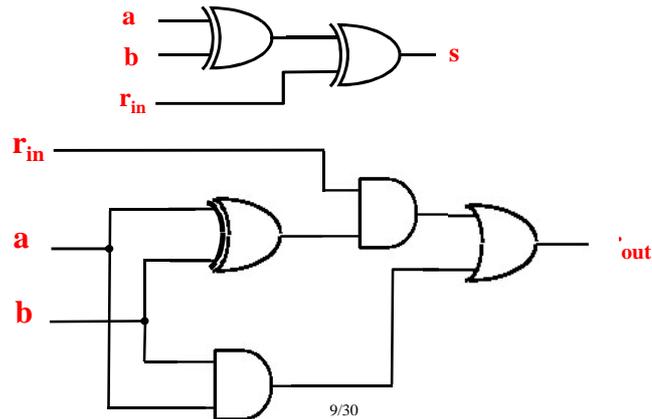
## Semplificazione circuitale



$$s = (a \oplus b)\overline{r_{in}} + \overline{(a \oplus b)}r_{in} = (a \oplus b) \oplus r_{in}$$
$$r_{out} = ab + (a \oplus b)r_{in}$$

6 porte logiche.

Cammini critici:  $s \rightarrow 2$ ;  $r_{out} \rightarrow 3$



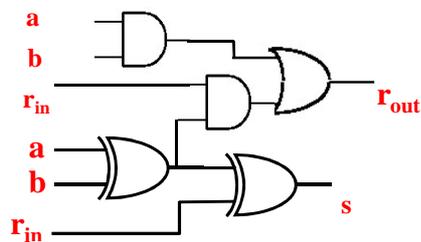
## Semplificazione ulteriore



$$s = (a \oplus b)\overline{r_{in}} + \overline{(a \oplus b)}r_{in} = (a \oplus b) \oplus r_{in}$$
$$r_{out} = ab + (a \oplus b)r_{in}$$

5 porte logiche.

Cammini critici:  $s \rightarrow 2$ ;  $r_{out} \rightarrow 3$

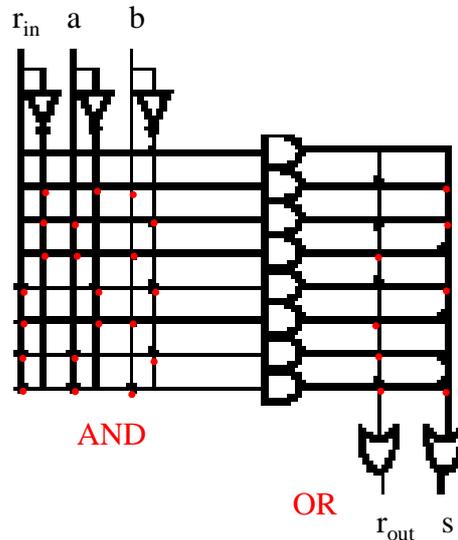




## Implementazione mediante PLA



a	b	r <sub>in</sub>	somma	r <sub>out</sub>
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1



SOP: costruisco i mintermini e li sommo.



## Complessità circuitale



- Definire la complessità circuitale e il cammino critico di HA:
  - $s = m1 + m2$
  - $r = m3$
- Definire la complessità circuitale e il cammino critico di FA:
  - $s = m1 + m2 + m4 + m7$
  - $r = m3 + m5 + m6 + m7$

Traccia:  $m1$  è un circuito con 3 ingressi ed un'uscita e si può spezzare in due parte AND in cascata.



## Esercizi con ROM e PLA



Implementare il circuito del Full Adder mediante ROM

Scrivere il circuito che esegue la somma di:  $3 + 4$  in base 2.  
Riportare tutte le uscite delle porte logiche.

Scrivere il circuito che esegue la seguente sottrazione:  $5 - 2$  in base 2. Riportare tutte le uscite delle porte logiche.

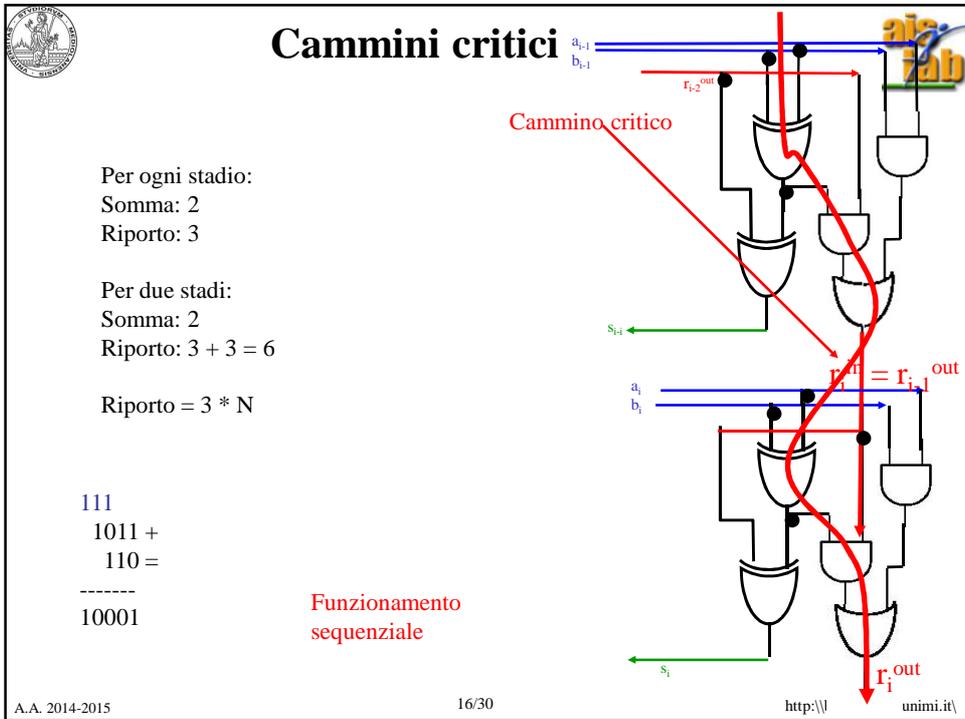
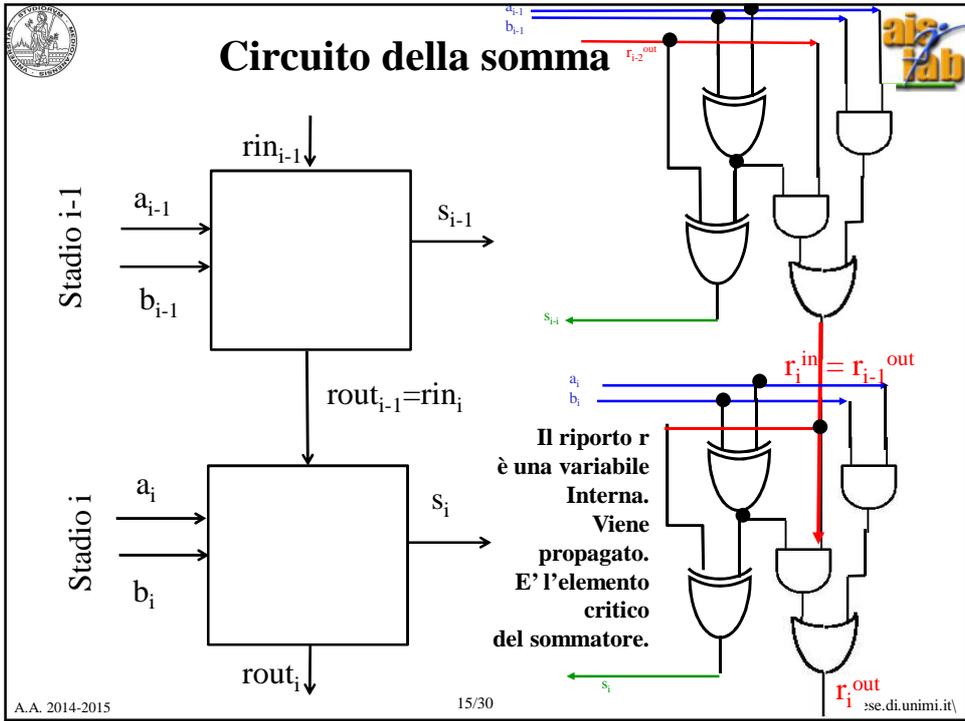


## Sommario



Addizionatori

Addizionatori ad anticipazione di riporto





## I problemi del full-adder



Il full adder con propagazione del riporto è lento:

- Il riporto si propaga sequenzialmente  
caratteristica dell'algoritmo di calcolo
- la commutazione dei circuiti non è istantanea (tempo di commutazione)  
caratteristica fisica dei dispositivi
- Soluzioni  
modificare l'algoritmo  
modificare i dispositivi



## Prima possibilità: forma tabellare



Riscrivo le equazioni del riporto in modo non sequenziale. Come?

$$r_{out} = f(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$$

Scrivo la tabella della verità dove in uscita ho gli N riporti ed  
In ingresso  $2 * N$  valori (gli N bit dei 2 addendi).

La tabella della verità ha  $2^{2N}$  righe (per  $N=32, \dots$ )



## Carry look-ahead (anticipazione di riporto)



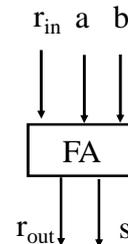
Approccio strutturato per diminuire la latenza della somma.

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

### Analisi del singolo stadio.

Quando si genera un riporto in uscita?

Quando ho almeno due 1, in ingresso; cioè tra  $r_{in}$ ,  $a$  e  $b$ .



$$\begin{array}{r}
 11000 \text{ riporto} \\
 1101 + \\
 100 = \\
 \hline
 10001
 \end{array}$$



## Propagazione e generazione

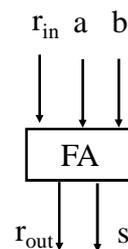


Ho riporto quando ho almeno due 1, in ingresso; cioè tra  $r_{in}$ ,  $a$  e  $b$ .

### Osservazioni:

- Viene generato un riporto dallo stadio  $i$ , qualsiasi sia il riporto in ingresso se  $a = b = 1 \Rightarrow g_i = a_i b_i$ .
- Viene generato un riporto allo stadio  $i$ , se il riporto in ingresso è  $= 1$  ed una delle due variabili in ingresso è  $= 1 \Rightarrow$  se  $p_i = (a_i \oplus b_i) \Rightarrow$  viene generato riporto se  $p_i r_i^{in} = 1$  ( $p_i$  propaga il segnale di riporto  $r_i^{in}$ ).

Quando sia la condizione 1) che la condizione 2) è verificata? Cosa succede se entrambe le condizioni sono verificate?





## Esempio



Sono interessato ad  $r_4^{out}$ . Supponiamo  $r_0^{in} = 0$ .

$r_{in}$	$0000000$	$0111000$
a	$10101101+$	$10101101+$
b	$10000=$	$11010=$
	-----	-----
	$10111111$	$11100111$

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 0$$

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 1$$

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 1$$

Per propagazione

Per generazione

$$p_4 = (a_4 \oplus b_4)r_4^{in}$$

$$g_4 = a_4b_4$$



## Sviluppo della funzione logica riporto



$$r_i^{out} = ab + (a \oplus b)r_i^{in}$$

$$r_i^{out} = g_i + p_i r_i^{in}$$

$$r_0^{out} = g_0 + p_0 r_0^{in}$$

$$r_1^{out} = g_1 + p_1 r_1^{in} = g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0^{in}$$

$$\begin{array}{r}
 r_1^{out} \rightarrow 111 \\
 1001 + \\
 10 = \\
 \hline
 1100
 \end{array}$$

$$1100$$

$$g_0 = 0$$

$$p_0 = p_1 = 1$$

$$\begin{array}{r}
 r_1^{in} \rightarrow 110 \\
 1001 + \\
 11 = \\
 \hline
 1100
 \end{array}$$

$$1100$$

$$g_0 = 1$$

$$p_1 = 1$$

$$\begin{array}{r}
 r_1^{out} \rightarrow 10 \\
 1010 + \\
 11 = \\
 \hline
 1100
 \end{array}$$

$$1100$$

$$g_1 = 1$$



## Sviluppo della funzione logica riporto



$$r_i^{out} = ab + (a \oplus b) r_i^{in}$$

$$r_i^{out} = g_i + p_i r_i^{in}$$

$$r_0 = g_0 + p_0 r_0$$

$$r_1 = g_1 + p_1 r_0 = g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0$$

$$r_2 = g_2 + p_2 r_1 = g_2 + p_2(g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0) = g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0$$

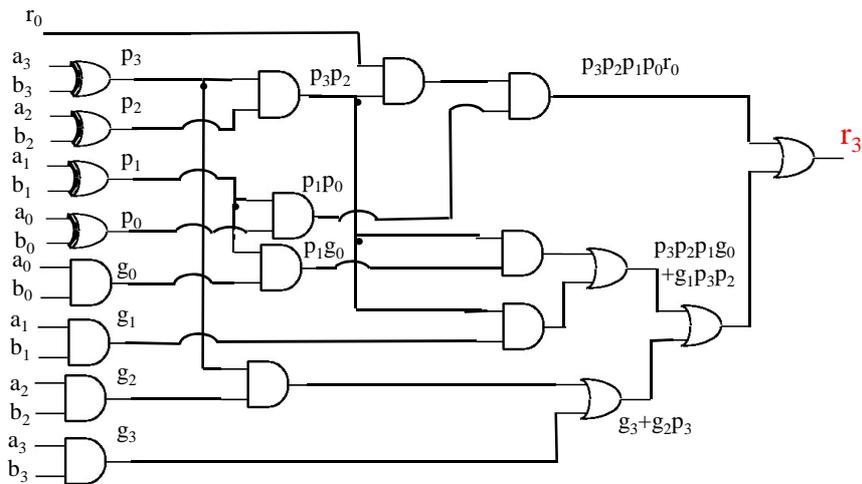
$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3(g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



## Determinazione del cammino critico.



$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3(g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



Cammino critico = 6, senza anticipazione sarebbe  $3 * 4 = 12$



## Quanto si guadagna con l'anticipazione del riporto?



Cammino critico per le variabili interne:

$$r_2^{\text{out}} \Rightarrow 5$$

$$r_1^{\text{out}} \Rightarrow 4$$

$$r_0^{\text{out}} \Rightarrow 3$$

Cammino critico per le variabili esterne:

$$r_3^{\text{out}} \Rightarrow 6$$

$$s_3 \Rightarrow 6 \text{ NB la prima porta XOR è in comune con } r_2^{\text{out}}$$

$$s_2 \Rightarrow 5 \text{ NB la prima porta XOR è in comune con } r_1^{\text{out}}$$

$$s_2 \Rightarrow 4 \text{ NB la prima porta XOR è in comune con } r_0^{\text{out}}$$

$$s_0 \Rightarrow 2$$

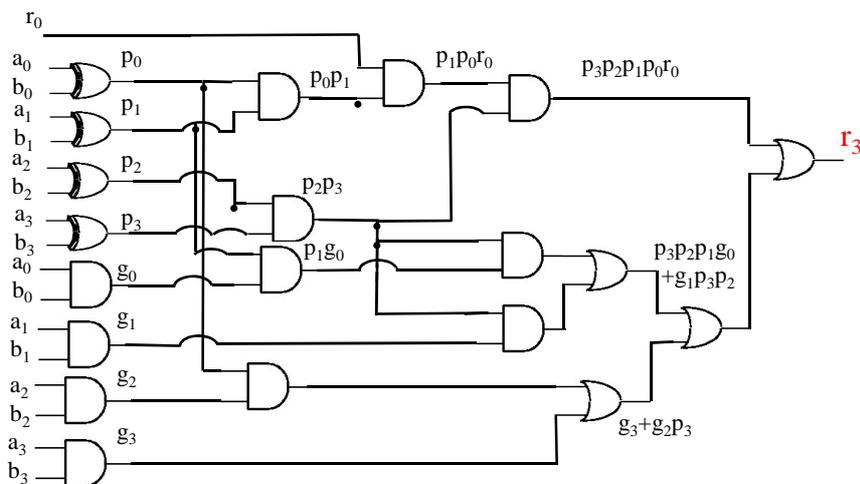
$$\text{Cammino critico} \Rightarrow \log_2(N)$$



## Determinazione la complessità.



$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3(g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



Complessità di  $r_3 = 20$  porte logiche



## Complessità



$$\begin{aligned}
 s_0 &= (a \oplus b) \oplus r_0 = g_0 \oplus r_0 \\
 s_1 &= g_1 \oplus r_1 = g_1 \oplus (p_0 r_0 + g_0) \\
 s_2 &= g_2 \oplus r_2 = g_2 \oplus (p_1 p_0 r_0 + p_1 g_0 + g_1) \\
 s_3 &= g_3 \oplus r_3 = g_3 \oplus (p_2 p_1 p_0 r_0 + p_2 p_1 g_0 + p_2 g_1 + g_2)
 \end{aligned}$$

Vengono richieste molte più porte a 2 ingressi. Quante?  
La complessità aumenta.

Aumenta il cammino critico?

$$\begin{aligned}
 r_3 &= g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3(g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = \\
 &g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0.
 \end{aligned}$$



## Addizionatori modulari

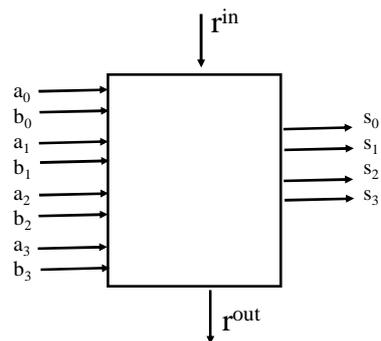


La complessità del circuito è tollerata per piccoli n.

Circuiti sommatore indipendenti si hanno per 4 bit.

Moduli elementari.

Come si ottiene la somma?



Collegando in cascata i moduli (sommatore elementari).

Cammino critico =  $6 * N/4$ . Per 32 bit, 48.

Per confronto, senza parallelizzazione, per 32 bit,  $N * 3 = 96$ .

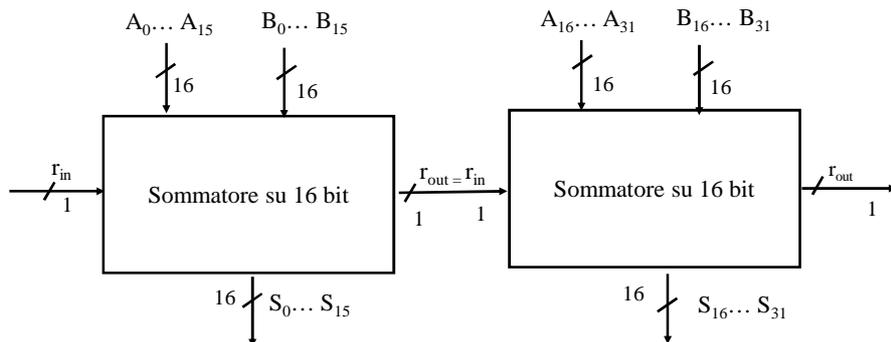


## Addizionatori modulari::esempio



Occorre sommare 2 variabili, A e B, su  $N = 32$  bit  
Ho a disposizione due sommatore su 16 bit.

Come si ottiene la somma?



## Sommario



Addizionatori

Addizionatori ad anticipazione di riporto