



I sommatori

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Scienze dell'Informazione

borgnese@di.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti: Appendice B5 prima parte.



Sommario

Addizionatori

Addizionatori ad anticipazione di riporto

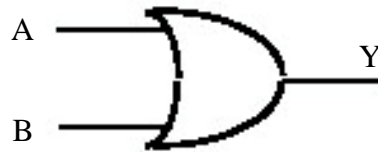


Somma e prodotto logico



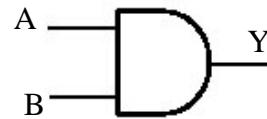
Somma \Rightarrow OR

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |



Moltiplicazione
 \Rightarrow AND

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



AND e OR su più bit



| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|

AND

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|

=

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|

OR

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|

=

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|



Operazione di somma



111 ← Riporto
1011 + ← Addendo 1
110 = ← Addendo 2

10001

3 Attori: addendo 1, addendo 2, riporto.

Viene eseguita sequenzialmente da dx a sx.



(Half) Adder ad 1 bit

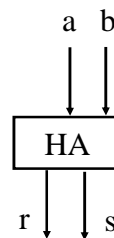
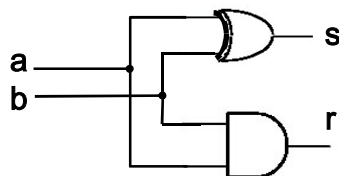


Tabella della verità della somma:

| a b | somma | riporto |
|-----|-------|---------|
| 0 0 | 0 | 0 |
| 0 1 | 1 | 0 |
| 1 0 | 1 | 0 |
| 1 1 | 0 | 1 |

$$s = a \oplus b$$

$$r = ab$$



La somma è diventata un'operazione logica!

Cammini critici:

Somma = 1;

Riporto = 1;

Complessità

Somma = 1 porta;

Riporto = 1 porta;



Full Adder ad 1 bit



Tabella della verità della somma completa:

| a | b | r_{in} | somma | riporto |
|---|---|----------|-------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$s = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$$

$$r = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$s = \bar{a} \bar{b} r_{in} + a \bar{b} r_{in} + a \bar{b} r_{in} + a b r_{in} =$$

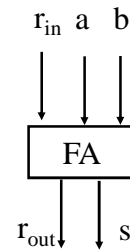
$$= (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (\bar{a}b + ab) r_{in} =$$

$$= (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = a b r_{in} + a \bar{b} r_{in} + a \bar{b} r_{in} + a b r_{in} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = a r_{in} + (a \oplus r_{in}) b$$

Quale è meglio?

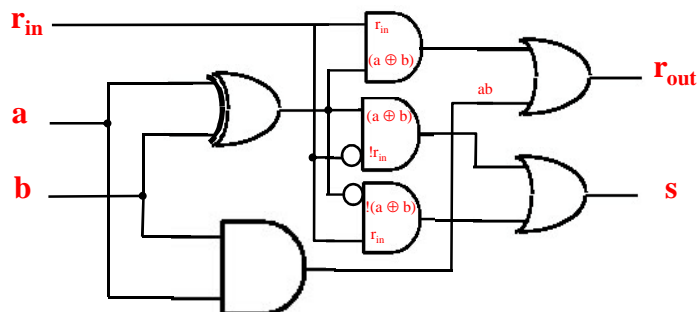


Implementazione circuitale



$$s = (a \oplus b) \bar{r}_{in} + (a \oplus b) r_{in}$$

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$



7 porte logiche.

Cammini critici: $s \rightarrow 3$; $r_{out} \rightarrow 3$



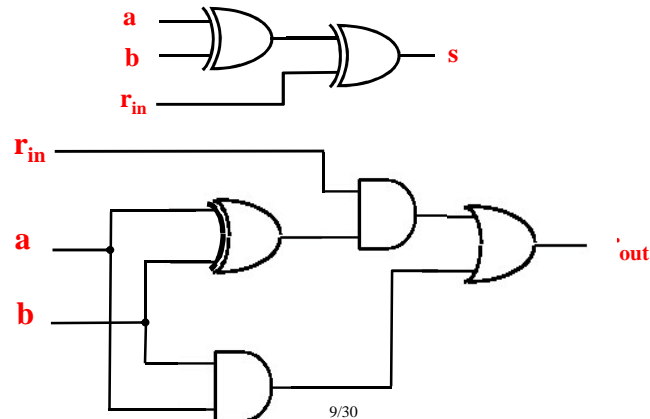
Semplificazione circuitale



$$s = (a \oplus b)\overline{r_{in}} + \overline{(a \oplus b)}r_{in} = (a \oplus b) \oplus r_{in}$$
$$r_{out} = ab + (a \oplus b)r_{in}$$

6 porte logiche.

Cammini critici: $s \rightarrow 2$; $r_{out} \rightarrow 3$



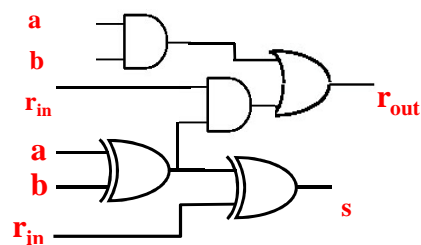
Semplificazione ulteriore



$$s = (a \oplus b)\overline{r_{in}} + \overline{(a \oplus b)}r_{in} = (a \oplus b) \oplus r_{in}$$
$$r_{out} = ab + (a \oplus b)r_{in}$$

5 porte logiche.

Cammini critici: $s \rightarrow 2$; $r_{out} \rightarrow 3$

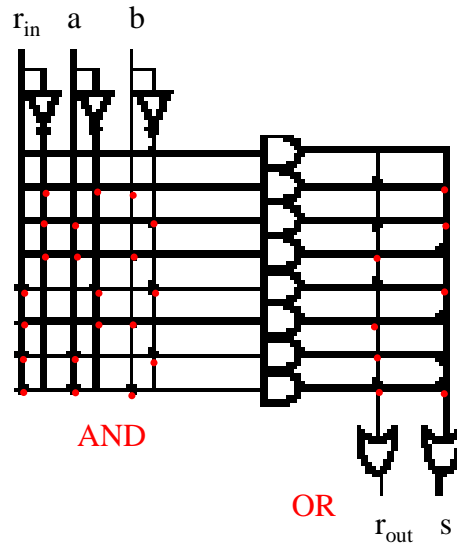




Implementazione mediante PLA



| a | b | r_{in} | somma | r_{out} |
|---|---|----------|-------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |



SOP: costruisco i mintermini e li sommo.



Complessità circuitale



- Definire la complessità circuitale e il cammino critico di HA:
 - $s = m1 + m2$
 - $r = m3$
- Definire la complessità circuitale e il cammino critico di FA:
 - $s = m1 + m2 + m4 + m7$
 - $r = m3 + m5 + m6 + m7$

Traccia: $m1$ è un circuito con 3 ingressi ed un'uscita e si può spezzare in due parte AND in cascata.



Esercizi con ROM e PLA



Implementare il circuito del Full Adder mediante ROM

Scrivere il circuito che esegue la somma di: $3 + 4$ in base 2.

Riportare tutte le uscite delle porte logiche.

Scrivere il circuito che esegue la seguente sottrazione: $5 - 2$ in base 2. Riportare tutte le uscite delle porte logiche.

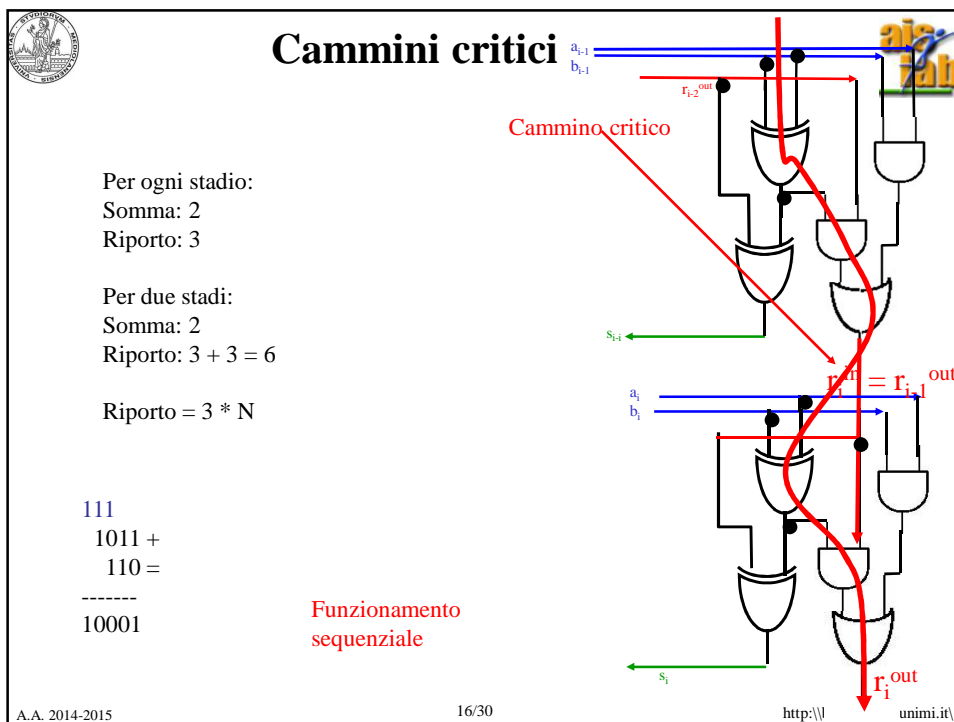
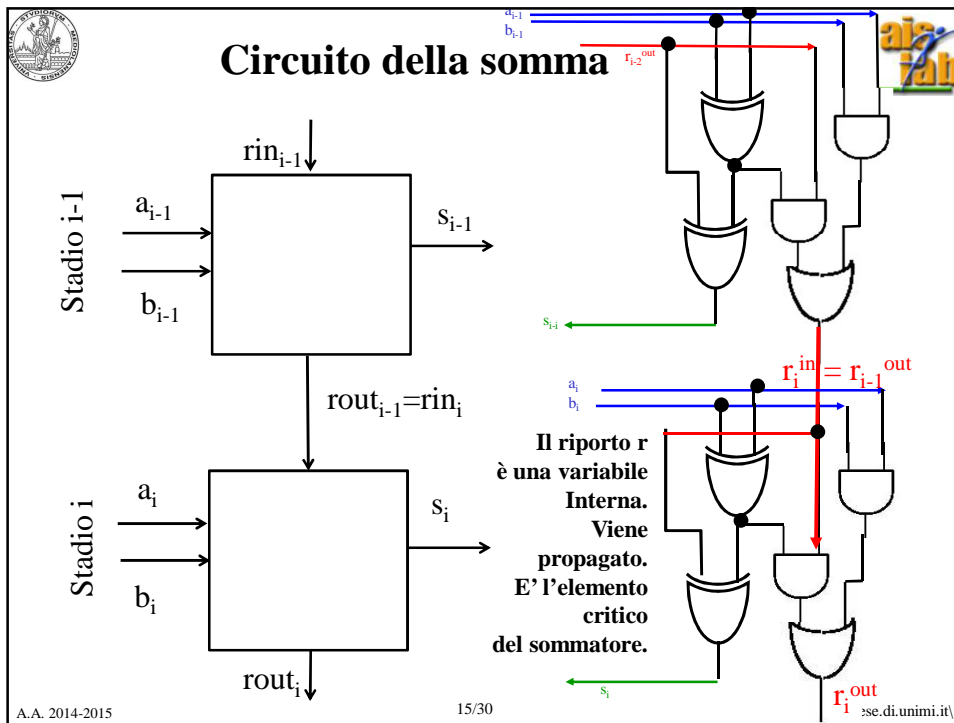


Sommario



Addizionatori

Addizionatori ad anticipazione di riporto





I problemi del full-adder



Il full adder con propagazione del riporto è lento:

- Il riporto si propaga sequenzialmente
caratteristica dell'algoritmo di calcolo
- la commutazione dei circuiti non è istantanea (tempo di commutazione)
caratteristica fisica dei dispositivi
- Soluzioni
modificare l'algoritmo
modificare i dispositivi



Prima possibilità: forma tabellare



Riscrivo le equazioni del riporto in modo non sequenziale. Come?

$$r_{out} = f(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$$

Scrivo la tabella della verità dove in uscita ho gli N riporti ed
In ingresso $2 * N$ valori (gli N bit dei 2 addendi).

La tabella della verità ha 2^{2N} righe (per $N=32$, ...)



Carry look-ahead (anticipazione di riporto)



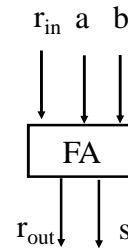
Approccio strutturato per diminuire la latenza della somma.

$$r_{out} = ab + (a \oplus b) r_{in}$$

Analisi del singolo stadio.

Quando si genera un riporto in uscita?

Quando ho almeno due 1, in ingresso;
cioè tra r_{in} , a e b .



$$\begin{array}{r} 11000 \text{ riporto} \\ 1101 + \\ 100 = \\ \hline 10001 \end{array}$$



Propagazione e generazione

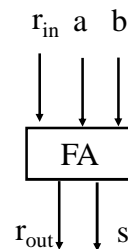


Ho riporto quando ho almeno due 1, in ingresso; cioè tra r_{in} , a e b .

Osservazioni:

- 1) Viene generato un riporto dallo stadio i , qualsiasi sia il riporto in ingresso se $a = b = 1 \Rightarrow g_i = a_i b_i$.
- 2) Viene generato un riporto allo stadio i , se il riporto in ingresso è $= 1$ ed una delle due variabili in ingresso è $= 1$
 \Rightarrow se $p_i = (a_i \oplus b_i) \Rightarrow$ viene generato riporto se $p_i r_i^{in} = 1$ (p_i propaga il segnale di riporto r_i^{in}).

Quando sia la condizione 1) che la condizione 2) è verificata?
Cosa succede se entrambe le condizioni sono verificate?





Esempio



Sono interessato ad r_4^{out} . Supponiamo $r_0^{in} = 0$.

| | | | |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| r_{in} | 0 0 0 0 0 0 | 0 1 1 1 0 0 | 0 1 1 1 0 0 |
| a | 1 0 1 0 1 0 1 + | 1 0 1 0 1 0 1 + | 1 0 1 1 1 0 1 + |
| b | 1 0 0 0 0 = | 1 1 0 1 0 = | 1 1 0 0 0 = |
| | ----- | ----- | ----- |
| | 1 0 1 1 1 1 1 | 1 1 1 0 0 1 1 | 1 1 0 1 0 1 0 |

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 0$$

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 1$$

$$r_5^{in} = r_4^{out} = 1$$

Per propagazione

Per generazione

$$p_4 = (a_4 \oplus b_4) r_4^{in}$$

$$g_4 = a_4 b_4$$



Sviluppo della funzione logica riporto



$$r_i^{out} = ab + (a \oplus b) r_i^{in}$$

$$r_i^{out} = g_i + p_i r_i^{in}$$

$$r_0^{out} = g_0 + p_0 r_0^{in}$$

$$r_1^{out} = g_1 + p_1 r_1^{in} = g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0^{in}$$

$$\begin{array}{r} r_1^{out} \rightarrow 111 \\ 1001 + \\ 10 = \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g_0 = 0 \\ p_0 = p_1 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} r_1^{out} \rightarrow 110 \\ 1001 + \\ 11 = \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g_0 = 1 \\ p_1 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} r_1^{out} \rightarrow 10 \\ 1010 + \\ 11 = \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$g_1 = 1$$



Sviluppo della funzione logica riporto



$$r_i^{\text{out}} = ab + (a \oplus b) r_i^{\text{in}}$$

$$r_i^{\text{out}} = g_i + p_i r_i^{\text{in}}$$

$$r_0 = g_0 + p_0 r_0$$

$$r_1 = g_1 + p_1 r_0 = g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0$$

$$r_2 = g_2 + p_2 r_1 = g_2 + p_2 (g_1 + p_1 g_0 + p_1 p_0 r_0) = g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0$$

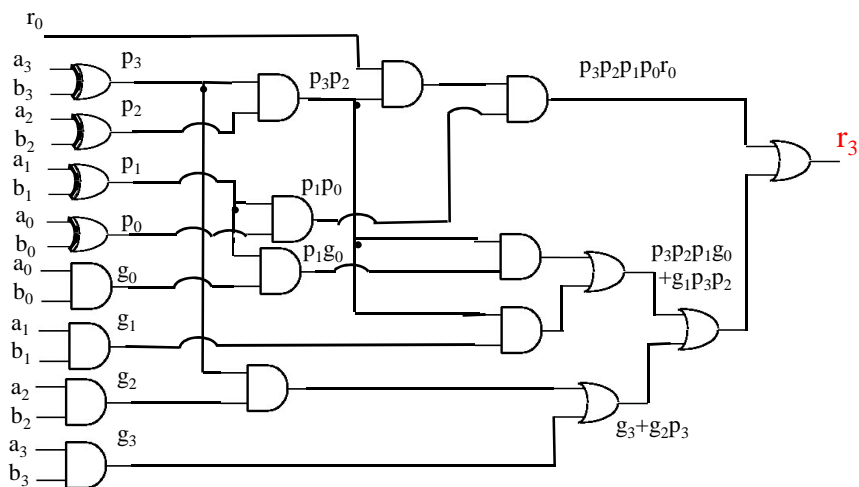
$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3 (g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



Determinazione del cammino critico.



$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3 (g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



Cammino critico = 6, senza anticipazione sarebbe $3 * 4 = 12$



Quanto si guadagna con l'anticipazione del riporto?



Cammino critico per le variabili interne:

$$r_2^{\text{out}} \Rightarrow 5$$

$$r_1^{\text{out}} \Rightarrow 4$$

$$r_0^{\text{out}} \Rightarrow 3$$

Cammino critico per le variabili esterne:

$$r_3^{\text{out}} \Rightarrow 6$$

$$s_3 \Rightarrow 6 \quad \text{NB la prima porta XOR è in comune con } r_2^{\text{out}}$$

$$s_2 \Rightarrow 5 \quad \text{NB la prima porta XOR è in comune con } r_1^{\text{out}}$$

$$s_2 \Rightarrow 4 \quad \text{NB la prima porta XOR è in comune con } r_0^{\text{out}}$$

$$s_0 \Rightarrow 2$$

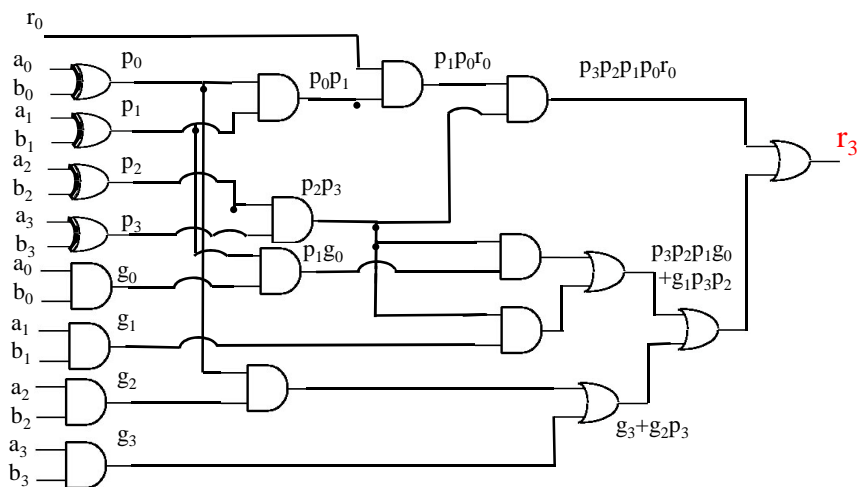
$$\text{Cammino critico} \Rightarrow \log_2(N)$$



Determinazione la complessità.



$$r_3 = g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3 (g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = \\ g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0$$



Complessità di $r_3 = 20$ porte logiche



Complessità



$$\begin{aligned}s_0 &= (a \oplus b) \oplus r_0 = g_0 \oplus r_0 \\s_1 &= g_1 \oplus r_1 = g_1 \oplus (p_0 r_0 + g_0) \\s_2 &= g_2 \oplus r_2 = g_2 \oplus (p_1 p_0 r_0 + p_1 g_0 + g_1) \\s_3 &= g_3 \oplus r_3 = g_3 \oplus (p_2 p_1 p_0 r_0 + p_2 p_1 g_0 + p_2 g_1 + g_2)\end{aligned}$$

Vengono richieste molte più porte a 2 ingressi. Quante?
La complessità aumenta.

Aumenta il cammino critico?

$$\begin{aligned}r_3 &= g_3 + p_3 r_2 = g_3 + p_3(g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 r_0) = \\&g_3 + p_3 g_2 + p_3 p_2 g_1 + p_3 p_2 p_1 g_0 + p_3 p_2 p_1 p_0 r_0.\end{aligned}$$



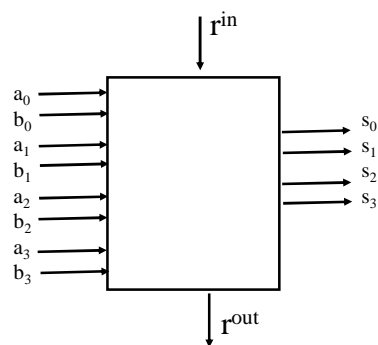
Addizionatori modulari



La complessità del circuito è tollerata per piccoli n.

Circuiti sommatori indipendenti si hanno per 4 bit.

Moduli elementari.



Come si ottiene la somma?

Collegando in cascata i moduli (sommatori elementari).

Cammino critico = $6 * N/4$. Per 32 bit, 48.

Per confronto, senza parallelizzazione, per 32 bit, $N * 3 = 96$.

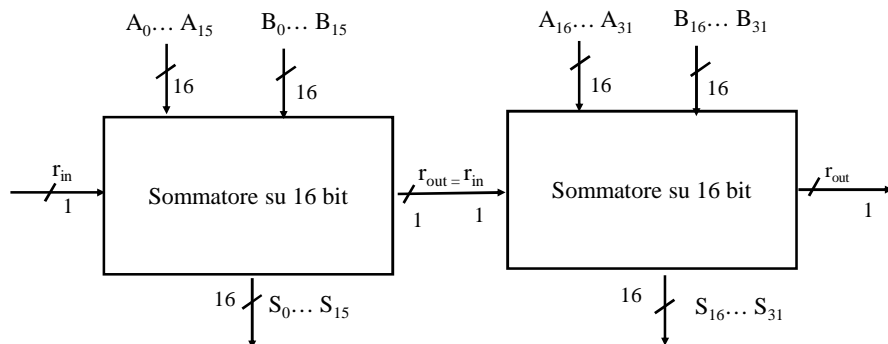


Addizionatori modulari::esempio



Occorre sommare 2 variabili, A e B, su $N = 32$ bit
Ho a disposizione due sommatore su 16 bit.

Come si ottiene la somma?



Sommario



Addizionatori

Addizionatori ad anticipazione di riporto